Enséñame a "contar" y... a "no contar"

José Antonio Fernández Bravo

USO Y ABUSO DE LA TÉCNICA DE CONTAR

para el desarrollo del pensamiento numérico y matemático

Lluvia Editores

El método Doman adaptado a educación personal

Programa Despegar

Enséñame
a "contar"
y... a "no contar"

Enséñame a "contar" y... a "no contar"

USO Y ABUSO DE LA TÉCNICA DE CONTAR

para el desarrollo del pensamiento numérico y matemático

José Antonio Fernández Bravo

Lluvia Editores

El método Doman adaptado a educación especial
Programa Despegar

Enséñame a "contar" y... a "no contar"

2014, primera edición, Madrid, España
2017, primera edición, Lima, Perú

¿Necesita utilizar un fragmento de alguna de nuestras obras? Diríjase a:

CEDRO

«Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra (www.conlicencia.com: 91 702 19 70 / 93 272 04 47)»

Edición a cargo de *Esteban Quiroz Lisneros*
Corrección de textos: *Lluvia Editores*
Ilustración de carátula: *Josué Sánchez*
Diseño carátula e interiores: *Julton Padilla Gervacio*

© José Antonio Fernández Bravo, 2017
Grupo Mayéutica. Educación, 2017
www.grupomayeutica.com

© Programa Despegar, 2017
Av. Aviación 1835 San Luis
✆ 999 137 240
programadespegar@hotmail.com

© Lluvia Editores SRL, 2017
lluviaeditores@gmail.com

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

ISBN: 978-612-4095-57-3
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
Nº 2017-01182
Impresión: Lluvia Editores SRL
Av. Inca Garcilaso de la Vega 1976, Of. 501. Lima-1. Perú.

Impresa en el Perú
Imprimé au Pérou
Printed in Peru

La pregunta fundamental no es cómo de bien realiza el niño la "ficha" que hace, sino cuánto de bien le hace al niño la "ficha" que realiza.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN 13

I PARTE: ENSÉÑAME A "CONTAR"
INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA SOBRE LA TÉCNICA DE CONTAR COMO ACTIVIDAD MATEMÁTICA

Capítulo 1. LA TÉCNICA DE CONTAR COMO ACTIVIDAD MATEMÁTICA 23
1.1 Las "dificultades" observadas 25

Capítulo 2. FASES PARA EL APRENDIZAJE DE LA ACTIVIDAD DE CONTAR 31
2.1 Canción. (Principio de verbalización) 32
2.2 Separación. (Principio de independencia) 33
2.3 Correspondencia. (Principio de correspondencia) 34
2.4 Consecuencia. (Principio de cuantificación) 35

Capítulo 3. IDENTIFICACIÓN DEL NÚMERO CARDINAL QUE REPRESENTA UNA CANTIDAD Y VICEVERSA 39
3.1 El número cero 41
3.2 Contar elementos en cualquier posición 42
3.3 Ordenar 43
3.4 Descomponer 45
3.5 Componer 47
3.6 Obtener el resultado de una resta mediante conteo 49
3.6.1. La representación matemática 52

Capítulo 4. DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES. OTROS AUTORES: DIFERENCIAS Y ANALOGÍAS 55

Capítulo 5. PASOS QUE SEGUIR COMO SECUENCIA DE INTERVENCIÓN PARA CONTAR 59

II PARTE: ENSÉÑAME A "NO CONTAR" INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA SOBRE LA ADQUISICIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO SIN NECESIDAD DE CONTAR

Capítulo 6. ARGUMENTOS LÓGICOS, CIENTÍFICOS Y PEDAGÓGICOS: CONTAR Y "NO CONTAR" 71

Capítulo 7. PRINCIPIOS, FASES Y PASOS PARA LA ADQUISICIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO CARDINAL SIN NECESIDAD DE CONTAR 77

7.1 Programa para el pensar numérico 78
7.1.1. Principio de generación 79
7.1.2. Principio de asignación 80
7.1.3. Principio de relación 84

7.2 Secuencia propuesta para el desarrollo del programa sobre el pensar numérico 96
7.2.1. Secuencia de contenido 96
7.2.2. Temporalización 100

ANEXOS

ANEXO 1. Grafías y guarismos 105
ANEXO 2. Metodología didáctica 107
ANEXO 3. Canciones de números 109
ANEXO 4. Regletas de Cuisenaire 113
ANEXO 5. Tarjetas de números 119

BIBLIOGRAFÍA 125

La adquisición del concepto de número no es fácil para los niños. En la iniciación de su aprendizaje se encuentran con obstáculos de entendimiento y comprensión que deben salvarse con procedimientos didácticos bien dirigidos.

Cuando el concepto de número no se adquiere bien, dificulta el alcance de un sentido y significado correcto de la numeración y las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir. El concepto de número es un conocimiento imprescindible.

Desde muy pequeños enseñamos a los niños a contar (uno, dos, tres, cuatro,...) Madres y maestros, abuelas y padres, maestras y abuelos, y hermanos y... nos iniciamos en una actividad que guiará a los niños en las primeras experiencias "numéricas".

Esta actividad de contar es sumamente necesaria, pero no es suficiente para desarrollar el aprendizaje del concepto de número. Cuánto más tiempo permanezca el niño en la etapa de conteo, más obstáculos tendrá el desarrollo de su pensamiento numérico y matemático.

Más allá de "contar" siempre, hay que utilizar otras estrategias lógicas más elaboradas y relaciones y propiedades superiores, que permitan el necesario avance intelectual para seguir aprendiendo Matemáticas.

Es muy probable que conociendo el objetivo se desconozca el procedimiento, pero es imposible que se conozca el procedimiento sin conocer el objetivo. Sin embargo, la escuela "arcaica" entiende que esto último es posible; lo peor de todo es que sigue convenciendo.

INTRODUCCIÓN

La adquisición del concepto de número no es fácil: por un lado, la historia de la Matemática aporta a esa afirmación pruebas suficientes; por otro, las respuestas que obtenemos de los alumnos que entran en contacto con este tema ofrecen datos que dejan al descubierto importantes vacíos en su comprensión, subrayando esas dificultades propias de la adquisición del concepto.

> *El número, en efecto, juega en dos terrenos: lo parecido y lo diferente. Las cosas que quieren enumerarse son parecidas en tanto que son; son diferentes en tanto que no son lo mismo. [...] Para hacer cuatro bisontes es preciso no querer distinguirlos, y al mismo tiempo es necesario estar convencido de que cada uno de ellos no es uno de los otros. (Guedj, 1998: 14-15)*

La didáctica utiliza, en la iniciación de la enseñanza del número, procedimientos que se apoyan habitualmente *-yo diría: peligrosamente, de forma exclusiva-* en la técnica de conteo. Deberíamos preguntarnos si esa técnica, aunque apoyada en válidos argumentos matemáticos termina, o no, de favorecer por sí misma la dinámica de relaciones que precisa una ortodoxa interpretación matemática del concepto de número cardinal; tanto en su elaboración intelectual, en su aplicación a situaciones cotidianas o en su correcta extensión aritmética dirigida hacia las operaciones básicas: adición, sustracción, multiplicación y división.

> *Las primeras ciencias son las matemáticas y la lógica formal porque son las más próximas y fáciles de obstraer por el hombre, ya que surgen de sus propias actividades. (Piaget, 1980)*

Cuando se escucha al niño, nace constantemente la necesidad de contrastar "lo que haces" en función de "lo que obtienes con lo que haces". En ocasiones existe una gran diferencia entre: "lo que espera obtener el docente que está enseñando" y "lo que se obtiene del alumno que está aprendiendo"; diferencia entre, lo que la enseñanza *busca* en el aprendizaje y lo que en el aprendizaje *encuentra*.

> *Aprendan ante todo los profesores a observar atentamente a sus alumnos, a captar sus intereses y sus reacciones, y cuando sepan leer bien en ellos, comprobarán que en ningún libro ni tratado existe tanta sustancia pedagógica como en el libro abierto de una clase, libro eternamente nuevo y sorprendente. (Puig Adam, 1956:8)*

Hay que plantearse, entonces, algunas preguntas y abrir caminos de investigación para alcanzar respuestas. Y eso fue lo que hicimos al advertir la imperiosa necesidad de estudiar posibles procedimientos para el aprendizaje del concepto de número cardinal y su extensión matemática, en edades de 2 a 7 años[1].

Mis hipótesis de trabajo en cualquier investigación llevada a cabo sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática han sido las siguientes:

a) Que las respuestas que obtenemos no coincidan con las que esperamos, no significa en modo alguno que el niño no razone, sino que existe discrepancia entre lo que la enseñanza aporta y lo que el aprendizaje recibe.

b) El niño nunca responde por azar, si no ha sido intimidado.

c) El niño nunca quiere fallar o hacerlo mal, si no ha sido irritado.

d) Ni existe, ni existirá método alguno de enseñanza superior a la capacidad de aprendizaje de la mente humana.

La metodología llevada a cabo se apoya en la investigación-acción. Se parte de una dificultad perfectamente identificada y definida (Necesidad y justificación de la investigación), ofrecida habitualmente por un niño o grupo de niños. Se intenta dar respuesta de intervención educativa con unas líneas de acción didáctica que eviten esa dificultad: investigación sobre el procedimiento (El problema de la investigación: ¿qué procedimiento didáctico de intervención educativa puede evitar esa dificultad?). Empieza un estudio

1 Según el Currículum actual español estas edades se corresponden con las etapas de Educación Infantil y primer ciclo de Educación Primaria.

de reflexión fuerte en el que se hace uso de la Lógica, la epistemología de la ciencia, y fundamentos y principios psicopedagógicos.

> *Importa consignar que los descubrimientos más brillantes, se han debido, no al conocimiento de la lógica escrita, sino a esa lógica viva que el hombre posee en su espíritu. (Ramón y Cajal, 1995: 27)*

Una vez creado el procedimiento se comprueba si evita la dificultad. Si no es así, se siguen estudiando nuevos procedimientos hasta llegar a encontrar el que da respuesta afirmativa al problema. Sólo en este momento podemos hablar de innovación educativa. Curioso es el hecho de comprobar que el procedimiento P, que ha evitado la dificultad en un grupo de niños A, evita la misma dificultad en otro niño o grupo de niños distinto al grupo A, como he podido comprobar[2], como validez externa del procedimiento, en muchos proyectos de formación del profesorado: cursos, seminarios, grupos de investigación.... que he dirigido o he sido responsable como ponente o coordinador. Que el procedimiento P sirva para otro grupo de niños distinto al grupo de niños con el que se ha realizado la investigación, tiene científicamente al menos una explicación: las causas o causa de esa dificultad es común a todos; quizás, la ausencia de compresión, el hacer por hacer, el retener sin entender, la falta de manipulación para generar ideas, la distancia con la realidad y la evidencia....

> *Como han afirmado muchos pensadores y pedagogos, el descubrimiento no es fruto de ningún talento originariamente especial, sino del sentido común mejorado y robustecido por la educación técnica y por el hábito de meditar sobre los problemas científicos. (Ramón y Cajal, 1995: 45-46)*

Según (Fernández, Gutiérrez, Gómez, Jaramillo y Orozco, 2004) "La acción de contar constituye para la humanidad el medio para desarrollar los conceptos numéricos y de cálculo, lo que constituye un elemento fundamental en la elaboración del número abstracto". Puedo estar de acuerdo con ellos en la primera parte de la frase pero dudo que de esta parte pueda inferirse que sea "elemento fundamental en la elaboración del número abstracto".

2 Si un grupo de profesores admite las mismas dificultades en algunos de sus alumnos, reconocidas durante años de docencia, y al aplicar el procedimiento P estas dificultades desaparecen, es prueba suficiente de que el procedimiento P es válido para evitar esas dificultades. Pero esto no supone dar por terminada la tarea fundamental de la enseñanza: abrirse constantemente a una investigación didáctica e innovación educativa. Con el tiempo observaremos nuevas dificultades en otros niños tras aplicar el procedimiento P y, tendremos que crear otro procedimiento P1 que evite las dificultades observadas, y así sucesivamente; siendo el tiempo el que nos guíe desde la observación atenta.

Baroody (1994) no garantiza que por el hecho de contar oralmente el niño pueda dar una respuesta satisfactoria cuando se le presenta un conjunto de elementos y se le pregunta "¿cuántos... hay?" "La capacidad para contar de palabra y enumerar objetos, por sí misma, no implica necesariamente una comprensión del número bien desarrollada." (Baroody, 1988). "A la pregunta de qué cosa es el número uno, o de qué denota el signo 1, se puede responder: pues una cosa. Y si se hace notar entonces que el enunciado -el número uno es una cosa- no es una definición, porque a un lado se halla el artículo determinado y al otro el indeterminado, y que tal enunciado sólo expresa que el número uno pertenece a las cosas, pero no qué cosa es..." (Frege, 1972:13). Para Kamii (1995:16, 27): "El número es una relación creada mentalmente por cada sujeto"; "es una estructura mental que se tarda mucho tiempo en construir".

La técnica de contar no es suficiente para desarrollar el aprendizaje del concepto de número. Hay que utilizar otras estrategias lógicas más elaboradas y relaciones matemáticas superiores que permitan el avance intelectual para no tener que contar siempre.

> *El resultado experimentado que, al parecer tiene primordial importancia para los maestros, hace hincapié en el hecho de que la capacidad de un niño para contar y contar en la sucesión correcta, no es un criterio de su saber o capacidad aritmética.*
>
> *(Lawrence, Thearkistan y Isaacs, 1968: 51)*

Existen numerosas investigaciones y estudios sobre el conteo y, aunque son muchos los autores que se cuestionan si la técnica de contar permite un correcto desarrollo del pensamiento numérico, no he encontrado durante este tiempo ningún estudio o investigación sobre algún proceso de desarrollo cognitivo para la adquisición del concepto de número, sin necesidad de contar. Sin excluir el contar como actividad matemática, nos dimos cuenta que una cosa era contar y, otra, muy distinta, ofrecer actividades que favoreciesen la retención intelectual de una cantidad de elementos. Nos introdujimos en dos investigaciones: una, considerando contar como una actividad matemática, estudiar actividades que favoreciesen la técnica de conteo sin desnaturalizar el procedimiento matemático; otra investigación, pertenecería a la adquisición del concepto de número sin necesidad de contar a partir de cantidades retenidas intelectualmente. A través de las observaciones realizadas con niños de 2 a 7 años de edad, diseñamos y desarrollamos: un programa para "enseñar a contar"; y, otro programa, para la adquisición del concepto de número cardinal "sin necesidad de contar".

> *Preferible es la arrogancia al apocamiento; la osadía mide sus fuerzas y vence o es vencida, pero la modestia excesiva huye de la batalla y se condena a vergonzosa inacción. (Ramón y Cajal, 1995: 31)*

Para cualquier labor en la que se espera cierto éxito pedagógico es fundamental, a mi juicio, DOMINAR la materia objeto de estudio y ESCUCHAR al niño. La Didáctica tiene al menos dos tareas básicas y esenciales: la tarea de *traducción* y, la de *adaptación*. *Traducir* correctamente al entendimiento esencial el contenido de la ciencia de estudio que se desea enseñar (entenderlo el que lo enseña) y, *adaptarlo* adecuadamente al sujeto que lo aprende (entenderlo el que lo aprende)[3].

Tanto el NIÑO (desde nuestra tarea de *adaptación*) como la MATEMÁTICA (desde nuestra tarea de *traducción*) nos dicen que tan importante es dominar la técnica de conteo, como prescindir de ella lo antes posible para todo aquello que se pueda calcular sin contar.

Este libro se divide en dos partes: en la primera parte (I) hablamos sobre LA TÉCNICA DE CONTAR COMO ACTIVIDAD MATEMÁTICA; y, en la segunda parte (II) sobre LA ADQUISICIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO SIN NECESIDAD DE CONTAR. Desde las conclusiones de ambas investigaciones escribimos sugerencias para la intervención educativa, en Educación Infantil y primeros cursos de Educación Primaria.

3 . Esto no quiere decir que necesariamente tenga que ser la misma persona la que *traduzca* y la que *adapte*. Por eso, en ocasiones, es imprescindible para una correcta labor didáctica la formación de un equipo. Para el buen funcionamiento de este equipo (es decir, todo aquello que evite un aprendizaje mediocre) las personas que lo forman más que reconocer su preparación y saber deberán reconocer cada uno de ellos, ante los otros, sus carencias e ignorancia.

PARTE 1

ENSÉÑAME A "CONTAR"

INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA SOBRE LA TÉCNICA DE CONTAR COMO ACTIVIDAD MATEMÁTICA

Cuando escuché al docto astrónomo, cuando me presentaron en columnas las pruebas y guarismos, cuando me mostraron las tablas y diagramas para medir, sumar y dividir, cuando escuché al astrónomo discurrir con gran aplauso de la sala, qué pronto me sentí inexplicablemente hastiado, hasta que me escabullí de mi asiento y me fui a caminar solo, en el húmedo y místico aire nocturno, mirando de rato en rato, en silencio perfecto a las estrellas.

"Cuando escuché al docto astrónomo"

Walt Whitman

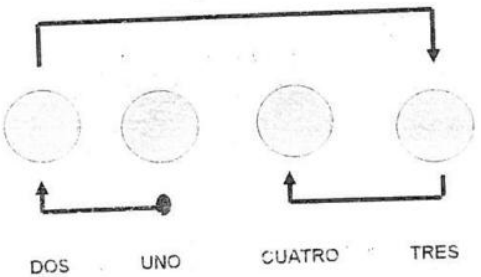
Objetivo fundarnental de una Educación bien planteada es mejorar del individuo: inteligencia y bondad. (Dudo si lo he escrito en el orden correcto)

CAPÍTULO 1 LA TÉCNICA DE CONTAR COMO ACTIVIDAD MATEMÁTICA

¿Qué es o qué se entiende por contar elementos? Contar es establecer una correspondencia entre el sonido de los Números Naturales, y en el orden en el que éstos aparecen, con todos y cada uno de esos distintos elementos. Si G es el grupo de elementos que hay que contar, éstos se darían por contados cuando se define una aplicación de N en G, siendo N el conjunto de los Números Naturales. Así, por ejemplo, si tengo que contar los elementos del siguiente grupo de círculos, simplemente haría corresponder, con cada uno, el sonido de los Números Naturales:

UNO DOS TRES CUATRO

Dicho esto parece que hemos terminado, pero no es del todo cierto. Contar tiene una consecuencia: "el último sonido pronunciado coincide con el cardinal"; en este caso, de círculos. Así podemos decir, entonces, que hay cuatro círculos. Si es así, y seguimos el orden de los Números Naturales, da igual por el elemento que empecemos:



Pero qué curioso debe ser esto para los ojos del niño, neófito en la materia, y teniendo que entender -¿quizás a la fuerza?- que a un círculo le hemos llamado uno, que a un círculo le hemos llamado dos, que a un círculo le hemos llamado tres. ¡Eso no puede estar bien!, un círculo es "uno". Un círculo no es "dos", ni "cuatro". ¡Qué jaleo!- (Ya, ya sé que el niño no entiende). Cuando dice dos tiene que entender que hasta ahí van dos; y cuando dice tres, que hasta ahí van tres elementos; hay que ir acumulando. ¿Y eso quién se lo ha enseñado?

Quizas haya que decir algo mas sobre el contar y completar lo que hasta ahora se ha dicho con algo fundamental, matemáticamente hablando. Lo que tenemos es una sucesión de círculos. Observamos que, de izquierda a derecha, el primer elemento es uno, el segundo elemento es uno, el tercer elemento es uno y, así sucesivamente. Luego, lo que hasta ahora tenemos es una sucesión constante. La suma de los n primeros términos de esa sucesión definiría, entonces, el contar. El primer elemento de este sumatorio sería 1, el segundo elemento 2 y así sucesivamente: 3, 4, 5, 6,...

$$Sn = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots a_n$$

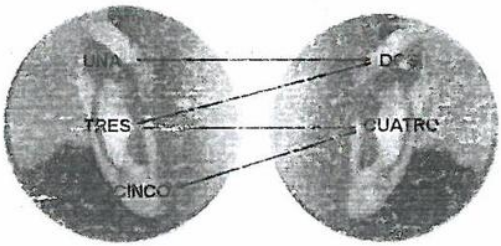
$$\textit{Siendo: } a_1 = 1;\ a_2 = 1;\ a_3 = 1;\ a_4 = 1;\ a_5 = 1;\ \ldots a_n = 1$$

$$Sn = 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots, 1$$

$$\sum(Sn) = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n$$

1.1 LAS "DIFICULTADES" OBSERVADAS

La observación de las respuestas que aportaban los niños y las niñas de Educación Infantil a preguntas de contenido numérico, nos dejaban en ocasiones con la boca abierta y, más que asombrarnos por lo que decían, nos aportaban esas expresiones una curiosidad por dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿por qué hacen lo que hacen?, ¿por qué dicen lo que dicen? No eran pocos los niños que no diferenciaban una cantidad de tres elementos, de otra de cinco elementos. Para ellos una y otra eran lo mismo, debido a que por contar entendían pararse en una palabra, que a modo de canción habían aprendido en orden, según la correspondencia biunívoca que, en cada caso, se establecía entre: el sonido de los Números Naturales y, todos y cada uno, de esos distintos elementos que se tenían que contar. Si les preguntabas, por ejemplo: ¿Tiene tu compañero cinco orejas?, pues haberlos había quienes decían que sí, e incluso te lo demostraban de la siguiente forma: señalaban a una de las orejas de su compañero al tiempo que decían "uno", señalaban la otra al tiempo que decían "dos", volvían a señalar la señalada anteriormente al tiempo que decían "tres", volvían a señalar... una y otra, entonces, hasta llegar a decir "cinco".



En otra ocasión, y ya sabiendo el niño expresar el cardinal de objetos mediante conteo, se les enseñó el número cero. Lo añadieron a la canción. Ese mismo niño que antes contaba tres objetos diciendo: "uno, dos, tres; hay tres"; ahora, contaba diciendo: "cero, uno, dos; hay dos", y, sin ser consciente de la diferencia de expresión numérica ante la misma cantidad, se quedaba tan contento; nada en su mente podría suponer que eso, ahora, no era así. Lo cierto es que al niño le daba igual, dos que tres. Pero el niño no cometía error alguno de razonamiento, pues infería correctamente de las condiciones establecidas:

a) Primera premisa: *Hay que atribuir a cada elemento un sonido.*

b) Segunda premisa: *Ese sonido señala por correspondencia a cada elemento en un orden dado.*

c) Tercera premisa: *El orden que ahora se ha de seguir es el siguiente: cero, uno, dos, tres, cuatro,...*

Nuevamente observamos lo que hacen los niños cuando cuentan, dicen: "uno, dos, tres,..." al tiempo que señalan cada vez a un elemento; es decir, que a un elemento le llaman "uno", a otro elemento le llaman "dos", (pero no deja de ser "uno"), a otro elemento le llama "tres", (pero no deja de ser "uno")...

La enseñanza dirige al niño a decir:

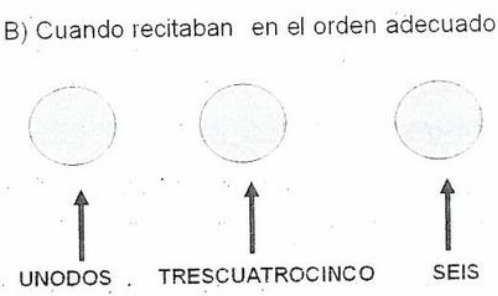
Sin embargo,
el niño que aprende ve UNO UNO UNO

¿No provocará este modo de hacer una percepción errónea de distinción entre cardinal y ordinal? Mientras que el ordinal se refiere a una posición, el cardinal hace referencia a una cantidad respecto a una unidad de medida.

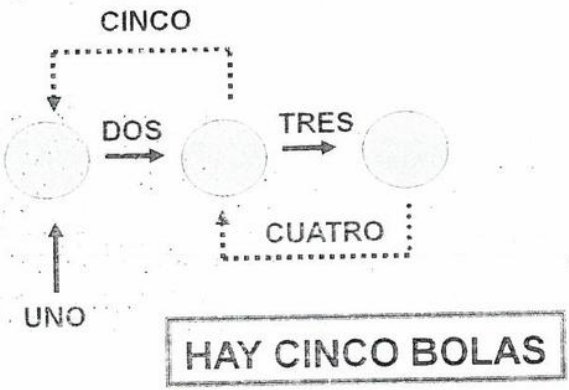
Analizaremos otros "errores" cometidos por los niños, que nos hacían dudar si contar les permitía realmente intelectualizar matemáticamente una cantidad de elementos, estableciendo relaciones numéricas más allá de la percepción o manipulación de un grupo de elementos representados por objetos físicos.

A) No recitaban en el orden adecuado

B) Cuando recitaban en el orden adecuado, no separaban correctamente los sonidos, estableciendo la correspondencia de forma incorrecta.



C) Cuando recitaban en orden y separaban los sonidos, nombraban varias veces un mismo elemento confundiendo, en términos matemáticos, la correspondencia biyectiva con la correspondencia sobreyectiva



Sin nombrar todas aquellas combinaciones que de estos errores descritos nos encontrábamos, o aquellos que eran poco habituales pero que no por ello dejaban de tener importancia. En cierta ocasión, un niño contó perfectamente tres pinturas, diciendo: uno, dos y tres. Inmediatamente después le dijimos que escribiera el número de pinturas; y escribió: 1, 2, 3. Nosotros esperábamos que escribiera sólo el número 3, pero él, sin embargo,

escribió los tres números. ¡Qué lógica!, pensé rápidamente: ha escrito los tres números que ha pronunciado. Quizás no sepa que el último sonido pronunciado coincide con el cardinal. Quizás haya que admitirlo como "error científico", pero quizás no haya que considerarlo "error de razonamiento"[4].

Como se podrá comprobar todos los "errores" tienen que ver con los elementos que se cuentan o con la verbalización por correspondencia. Respecto a los elementos que cuenta, o los omite o los repite; y, respecto a la verbalización puede omitir sonidos, repetirlos, inventarlos o recitar todos los que sabe sin hacer correspondencia con los elementos.

Labinowicz, (1986,1994) cita algunos errores que comete el niño al contar:

- ✔ Comienza el conteo verbal un paso anterior a la acción de partida por lo que cuatro objetos van a ser contados como cinco.
- ✔ Se salta un objeto: por lo tanto siete objetos van a ser contados como seis.
- ✔ Señala entre objetos en tanto que menciona un nombre numérico contando, por ejemplo, ocho objetos como nueve.
- ✔ Da dos nombres al mismo objeto, así cinco objetos serán contados como seis.
- ✔ Da un nombre numérico a dos objetos diferentes, por lo que seis objetos son contados como cinco.
- ✔ Continúa recitando nombres numéricos más allá del último objeto como fuera llevado por el ritmo de la secuencia sonora. Aquí cinco objetos pueden ser contados como seis, siete u ocho.

Para Gelman y Gallistel (1986) "los errores pueden deberse a tres causas: a) generar una serie numérica incorrecta (errores de secuencia); b) llevar un control inexacto de los elementos contados y no contados (errores de partición); y c) no coordinar la elaboración de la serie numérica y el proceso de control de los elementos contados y no contados (errores de coordinación)". Los errores de partición y errores de coordinación que cometen los niños al contar (Gelman, 1993, 2006; Gelman y Meck, 1983; Gelman y Gallistel, 1986), se pueden resumir en los siguientes:

4 Véase Fernández Bravo, 2011, págs. 181-203: La inestabilidad de la normalidad del error en la actividad escolar. ¿Cuánto de error tienen los errores que cometen los alumnos?

✔ Errores de partición:

- Los que consisten en dar por finalizado el conteo cuando aún no han sido tenidos en cuenta todos los elementos de la muestra.
- La tendencia de regresar a un objeto cuando ese objeto y otros próximos a él ya han sido contados.
- La tasa de repetición de modo que un elemento es contado más de una vez.
- Los de omisión que es el caso contrario al anterior.

Errores de coordinación:

- Los que tienen lugar en el inicio del conteo, reflejando los niños la dificultad que encuentran para aplicar la aplicación coordinada de los procesos de etiquetación y de partición. Como por ejemplo: el niño está señalando el primer objeto, pero esta dudoso y comienza a nombrarlo cuando esta señalando el segundo.
- Los errores que aparecen al final del conteo son semejantes de los que se mostraban al comienzo.
- Los errores que prolongan la etiquetación cuando ya no quedan elementos, o bien siguen contando elementos que anteriormente habían sido contados adecuadamente.

Según los datos que nos ofrecen los avances psicopedagógicos y neurocientíficos, todo el mundo nace con capacidad para aprender pero no todo el mundo nace con capacidad para enseñar.

CAPÍTULO 2 FASES PARA EL APRENDIZAJE DE LA ACTIVIDAD DE CONTAR

Teniendo en cuenta las dificultades presentadas por los niños, descritas anteriormente, no fue difícil llegar a establecer unos pasos básicos para realizar con éxito la actividad de contar. Partimos, como técnica de análisis, del punto de llegada para desmenuzar los elementos básicos y esenciales a utilizar en el proceso, dándoles un orden lógico, entonces, de aparición. Empezamos a trabajar después, como bien se ha visto, de escuchar al NIÑO y a la MATEMÁTICA.

Si lo que queremos es averiguar el cardinal de una cantidad de elementos a través de contar, y contar tiene como consecuencia que el último sonido pronunciado -y por acumulación- coincide con el cardinal, entonces tendremos que provocar actividades desde las que perciban la idea acumulativa, enseñando, antes que esto, a pronunciar ese "último sonido" respecto al orden establecido en los Números Naturales. Si para llegar a pronunciar ese "último sonido" tenemos que hacer corresponder los sonidos con los elementos, tendremos que enseñarles, antes de eso, a establecer correspondencias. Si esas correspondencias a las que nos referimos se establecen en orden entre los elementos y el sonido de los Números Naturales, tendremos que presentarles, antes que eso, la separación de los sonidos con los que establecer la correspondencia. Como no se puede separar algo que se desconoce, tendremos que enseñarles, antes que a separar algo, aquel algo que hay que separar. Así pues, descubrimos cuatro fases fundamentales que, en un orden dado, evitaba los errores descritos anteriormente:

- CANCIÓN: Sonidos ordenados de los Números Naturales.
- SEPARACIÓN: Independencia de los sonidos. Separar los sonidos ordenados de los Números Naturales, por referencia a cada número.
- CORRESPONDENCIA: Establecer una correspondencia biunívoca entre cada sonido y cada elemento.
- CONSECUENCIA: Identificar el cardinal de elementos en el último sonido pronunciado.

2.1 CANCIÓN. (PRINCIPIO DE VERBALIZACIÓN)

Les enseñaremos a modo de canción, y por convencionalismo, los sonidos que vamos a utilizar: uno dos tres cuatro cinco seis...

Haremos uso de retahílas, poemas, canciones populares... que sirvan para grabar en la memoria la secuencia de esos sonidos: así, por ejemplo

- Uno, dos, tres,
  Uno, dos, tres,
  ¡Me gusta contar
  otra vez!

- Uno, dos y tres
  Pedro, Juan y José.
  Lima, naranja y limón,
  Rosa, clavel y botón.

- Uno, dos y tres,
  Cuatro, cinco y seis.
  Si miras arriba lo vuelves a ver.

- Uno, dos y tres,
  Un bonito conejo cacé.
  Cuatro, cinco y seis,
  Lo mismo que vino se fue.

A la vuelta de mi casa,
me encontré con Pinocho
y me dijo que contara
hasta ocho.

Pin, uno, pin, dos,
pin, tres, pin, cuatro,
pin, cinco, pin, seis,
pin, siete, pin, ocho...

Podemos encontrar muchísimo material en Internet. También nos ayudará la consulta de Saá Rojo (2000), Valcárcel y Écija (2002) y San Andrés (2002):

Todos cuentan hasta cinco,
en la casa de Francisco,
uno, dos, tres, cuatro y cinco.

Cuenta, cuenta, uno, dos y tres
Es muy fácil, cuatro, cinco, seis
Sigue, siete, ocho, nueve, diez
Once, doce, vamos otra vez.

También podemos inventar canciones que se adapten a situaciones de nuestra intervención educativa cotidiana, sin importarnos cuánta originalidad puedan tener. Las asociaciones reiteradas tienen más influencia memorística a estas edades que el uso esporádico de canciones, por atractivas que éstas sean.

> *Las palabras "uno, dos, tres, cuatro" son ejemplos de conocimiento social. Cada lengua posee un conjunto diferente de palabras para contar. Pero la idea de número subyacente pertenece al conocimiento lógico-matemático, que es universal. (Kamii, 1995: 22)*

2.2 SEPARACIÓN. (PRINCIPIO DE INDEPENDENCIA)

Les enseñaremos a separar los sonidos de la canción que ya se saben: uno, dos, tres, cuatro, cinco,... Entendiendo el niño que "uno" es un sonido, que "dos" es otro, y distinto; y así, sucesivamente.

Podemos hacer uso de palmadas al tiempo que pronunciamos uno de esos sonidos. Así, estableceremos una correspondencia entre sonido y palmada: Uno (palmada); dos (palmada); tres (palmada); cuatro (palmada);...

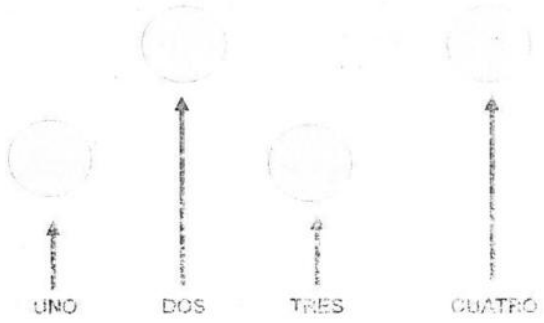
Otra actividad, podría consistir en utilizar papeles de distintos colores, enseñando un papel de un color distinto al tiempo que pronunciamos uno de esos sonidos. Así, estableceremos una correspondencia entre color y sonido, por ejemplo: Uno (rojo); dos (amarillo); tres (verde);...

Cualquier actividad que ayude al niño a percibir la separación de todos y cada uno de esos sonidos que ya sabe pronunciar en orden, por la etapa anterior; dotándolos intuitivamente de independencia y unicidad.

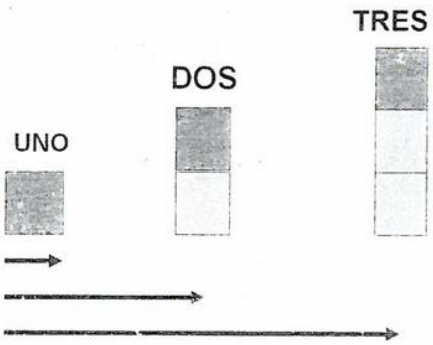
Sería imposible construir la relación de dos si el niño creyera que los objetos se comportan como gotas de agua (que pueden combinarse para formar una gota) (Kamii, 1995)

2.3 CORRESPONDENCIA. (PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA)

Les enseñaremos a establecer una correspondencia biunívoca (uno-uno) entre los elementos a contar y los sonidos separados.



Pero no lo haremos horizontalmente, ya que de esta forma no provocamos una buena percepción intuitiva sobre la idea de acumulación, sino verticalmente con elementos que se puedan apilar. Las primeras actividades de conteo deben ser verticales. Diremos "uno" (al tiempo que ponemos el primero), "dos" (al tiempo que ponemos el segundo), "tres" (al tiempo que ponemos el tercero)....



Cuando decimos dos, el niño ve dos, y no "uno": que es lo que vería si trabajásemos horizontalmente. Cuando decimos tres, el niño ve tres. También cuando decimos tres, el niño ve una torre más alta que cuando decimos dos, ayudando intuitivamente a la comparación de cantidades. De esta forma, también ayudamos al niño a saber cuándo se termina de establecer esa correspondencia (no hay más elementos que colocar), evitando así, que el niño cuente más de una vez el mismo elemento.

2.4 CONSECUENCIA. (PRINCIPIO DE CUANTIFICACIÓN)

Contar es establecer una correspondencia entre el sonido de los Números Naturales, y en el orden en el que estos aparecen, con todos y cada uno de esos distintos elementos. Y esto es lo que hemos realizado en el apartado anterior. Y hemos colocado verticalmente para permitir que el niño perciba de una manera intuitiva la acumulación de elementos por el nombre que a cada uno le corresponde. Pero contar tiene una consecuencia: el último sonido pronunciado coincide con el cardinal de elementos, y este es el trabajo en el que ahora nos embarcamos.

Algunos de nosotros creemos que la respuesta del niño a la pregunta ¿Cuántos/as...? es innata; nada más lejos de la realidad. La respuesta a la pregunta cuántos es convencional y consecuencia de varias definiciones y relaciones, por lo que es necesario enseñarle al niño a responder a esas preguntas.

A partir de un número de elementos cualesquiera, que respeten siempre la adquisición de los pasos anteriores por parte del niño (no tiene sentido contar veinte elementos si el niño sólo ha trabajado los apartados anteriores

hasta nueve -por ejemplo-), trabajaremos exactamente igual que en la fase de Correspondencia colocándolos verticalmente. Así, por ejemplo, si tuviéramos tres libros, diríamos: uno, dos, tres (formando una torre de tres libros). Una vez pronunciado el último sonido (tres) le diremos al niño: "Entonces decimos que hay tres libros", e inmediatamente después les preguntaremos: ¿Cuántos libros decimos que hay? (tres, responderán ellos). Repetiremos esto varias veces dejando también que sean ellos quienes construyan las diferentes torres para intervenir nosotros rápidamente a partir del último sonido pronunciado: "Entonces decimos que hay cinco cubos", ¿cuántos cubos decimos que hay?; entonces decimos que hay..., ¿cuántos... decimos que hay?"

- **Contamos los libros: Uno, dos, tres, cuatro, cinco.**
- **Entonces, decimos que hay cinco libros.**
- **¿Cuántos libros decimos que hay?**
- **Cinco.**

Del mismo modo actuaremos cuando el cardinal de elementos es uno. Les diremos: Entonces decimos que hay UNO libro; UNO carpeta; UNO... Esto puede parecer ridículo PODRÍAMOS PENSAR, porque en español se debería decir: UNA carpeta; UN libro. Pero eso no es del todo cierto, debido a que la verbalización del número "uno" es UNO y los números no tienen género. Si admitimos UNA carpeta, ¿por qué no admitimos OCHA mesas? No genera ningún problema que el niño oiga UNO carpeta y, UNO libro, y... Posteriormente y, por adaptación cultural a nuestra lengua, les diremos: cuando nosotros decimos UNO carpeta, los mayores dicen "una carpeta". Cuando nosotros decimos "UNO libro", los "mayores" dicen "un libro". De este modo, el niño no confundirá el determinante con el nombre numérico, y sabrá interpretar matemáticamente de forma correcta las expresiones: "una flor", "un cuaderno", una..., un..., con el número UNO.

El niño llega a intuir que el último sonido pronunciado, y en el orden de los Números Naturales, es la respuesta pedida a la pregunta: ¿cuántos...? Así, llegará un momento en el que sabrá qué hacer para responder directamente a nuestras preguntas sobre el cuántos: ¿Cuántos cubos hay?, ¿cuántos "..." hay? También el niño estará preparado para ejecutar correctamente una orden dada sobre una cantidad de elementos; así, por ejemplo, ahora se le podría pedir que nos enseñase: "dos cuadernos", "cinco estuches",...

Una vez que el alumno responde correctamente a la pregunta cuántos, y asocia la respuesta con la cantidad de elementos que corresponde, les presentaremos el dibujo que representa esa cantidad para que su mente interprete ese símbolo matemáticamente, al que se le reconocerá a partir de ahora como número. Así, les diremos: UNO, se dibuja así: 1; DOS, se dibuja así: 2; CUATRO, se dibuja así: 4;... Esto lo veremos en el siguiente capítulo.

LOS SIGUIENTES GRÁFICOS muestran, en tantos por ciento, diferencias de los aciertos, al utilizar la técnica de contar para responder a la pregunta "cuántos", entre los grupos experimental y control, de niños de tres, cuatro y cinco años de edad. Tanto el grupo experimental, como el grupo control es la suma de grupos experimentales y grupos de control utilizados durante tres cursos académicos diferentes, y en diferentes centros educativos.

- Muestra de Centros: Estratificada, por etapas, cronológica y no probabilística.
- Muestra de grupos: Probabilística (aleatoria simple).
- Muestra de alumnos: Coincide con la población, de los grupos.

TRES AÑOS CONTAR	EXPERIMENTAL N = 67	CONTROL N = 63	DIFERENCIA
Hasta 3	100	89	11
Hasta 5	100	82,5	17,5
Hasta 10	34,33	38,1	- 3,77
Más de 10	16,4	20,6	- 4,2

CUATRO AÑOS CONTAR	EXPERIMENTAL N = 62	CONTROL N = 69	DIFERENCIA
Hasta 5	100	91,3	8,7
Hasta 10	100	85,5	14,5
Más de 10	80,1	69,6	10,5

CINCO AÑOS CONTAR	EXPERIMENTAL N = 73	CONTROL N = 69	DIFERENCIA
Hasta 10	97,3	89,8	7,5
Hasta 20	97,3	86,9	10,4

El refuerzo positivo no consiste en decir que está bien lo que mal se ha realizado. Consiste en decir o hacer algo que provoque en el sujeto el sentimiento de querer mejorarlo la próxima vez que lo realice. La validez de las acciones que dedicamos al refuerzo positivo no se mide en el momento de la aplicación de éstas hacia un determinado trabajo entregado por el niño, sino en las otras siguientes y sucesivas entregas.

CAPÍTULO 3 IDENTIFICACIÓN DEL NÚMERO CARDINAL QUE REPRESENTA UNA CANTIDAD, Y VICEVERSA

El niño ya sabe el nombre numérico de una cantidad de elementos, mediante conteo. Ahora, tendrá que asociar ese nombre numérico con la cantidad y el símbolo matemático que representa esa cantidad; sólo entonces se puede decir que hablamos de número. El número es una entidad intelectual, no se percibe en la realidad, se proyecta a la realidad.

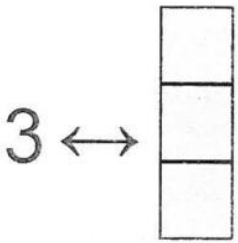
Para que esta asociación: nombre, cantidad y símbolo, tenga sentido para el niño y lo construya en su mente de una manera ortodoxa, matemáticamente hablando, es necesario que establezca una correspondencia perfecta entre lo convencional y lo intelectual.

Una vez que el alumno responde correctamente a la pregunta cuántos, y asocia la respuesta con la cantidad de elementos que corresponde, les presentaremos el dibujo que representa esa cantidad para que su mente interprete ese símbolo matemáticamente, al que se le reconocerá a partir de ahora como número. Así, les diremos: UNO, se dibuja así: 1; DOS, se dibuja así: 2; CUATRO, se dibuja así: 4;... Evitando hacer alusión a cualquier ayuda que pueda desnaturalizar el concepto que tienen que intelectualizar.

Actividad uno: El niño distinguirá y reconocerá con su propio lenguaje las formas (1, 2, 4, 0, 3, 5,...) Obsérvese que no son números, sino dibujos que el niño debe identificar de forma libre[5]. (Ver anexo 1)

Actividad dos: Una vez el niño sepa que el último sonido pronunciado coincide con el cardinal y responde a la pregunta ¿Cuántos? (Trabajo que hemos desarrollado en el apartado "CONSECUENCIA"), le informaremos cómo se dibuja el nombre numérico que asocia correctamente a una cantidad.

- **Contamos los libros.**
- **Uno, dos, tres.**
- **Entonces, decimos que hay tres libros.**
- **¿Cuántos libros decimos que hay?**
- Tres.
- Tres, se dibuja así: 3 (Ese es el dibujo del número tres)



5 Evitaremos influir en la percepción libre del niño con canciones como: "El uno es un soldado... el dos es un patito..." éstas pueden desnaturalizar el posterior concepto de número. Algún niño puede creer que dos es uno: por eso del patito; y nada más lejos de la realidad. Evítese, desde la enseñanza, todo eso de que si... el uno es un soldado, el cuatro una silla, el cero es una rosquilla, o cosas parecidas.

En estos momentos no estamos hablando de números, sino de formas, por lo que conviene que sea el niño el que nos diga lo que ve desde lo que su experiencia le ha preparado para ver. Para algunos niños la forma: 1, puede ser un "delgado", "un palo" etc.; para otros o los mismos, la forma: 2, puede ser "un torcido", "una percha", "un circuito", "un dos" o "un patito". Que se respete lo que él ha visto es muy distinto a que él tenga que respetar lo que nosotros queramos que vea. ¡Qué obsesión tiene la enseñanza en poner en la mente del niño los ojos del maestro! ¿Cómo vamos a educar así la observación?

UNO, se dibuja así: 1

DOS, se dibuja así: 2

TRES, se dibuja así: 3

CUATRO, se dibuja así: 4

[...]

Se realizarán actividades en las que el niño pueda buscar el número que le corresponde a una cantidad de elementos, por su cardinal; y actividades en las que el niño pueda encontrar la cantidad de elementos que representa un número cardinal.

3.1 EL NÚMERO CERO

El concepto de número cero, no debe introducirse nunca en primer lugar. Los niños deben percibirlo a estas edades como ausencia de elementos. Y nadie puede ser consciente de la ausencia de elementos si antes no ha sido consciente de su existencia. Así, que podríamos proceder de formas similares a ésta: se cuentan, por ejemplo, una cantidad de objetos que se sujetan encima de una mesa. Supongamos que el niño ha respondido correctamente a las preguntas: ¿Qué ves encima de la mesa? ¿Cuántos... hay encima de la mesa?; y esas respuestas fueran: botes y tres, respectivamente. Ahora quitaremos todos los botes que hay encima de la mesa, y preguntaremos: ¿Ves ahora botes encima de la mesa?; "No", será la respuesta del niño. Nosotros nos expresaremos inmediatamente después de la siguiente forma: "Entonces decimos que ahora hay cero botes -"cero"- encima de la mesa" "¿Cuántos botes decimos que hay ahora encima de la mesa? (CERO). Haremos este ejercicio con elementos de distintas clases y con diferentes cantidades, para que el niño entienda por "hay cero", la ausencia total de esos elementos cuya propiedad numérica se ha identificado anteriormente, o, la negación de cantidad alguna, en magnitud cualquiera.

- CERO, se dibuja así: 0

3.2 CONTAR ELEMENTOS EN CUALQUIER POSICIÓN

Si bien es cierto que la colocación vertical ayuda al niño a ver la acumulación de elementos, también es cierto que tras esa ayuda el niño tiene que saber contar cualquier cantidad de elementos en cualquier posición. Para enseñar esto utilizaremos el *desafío* y la provocación a partir de lo que saben. Una técnica consiste en pedir al niño nos diga cuántos lapiceros hay (estos están por ejemplo encima de una mesa).

El niño no los puede apilar en forma de torre, entonces esperaremos a ver qué se le ocurre para responder a nuestra pregunta (Es importante que estos ejercicios se realicen después de dominar la técnica en posición vertical). Observaremos que muchos niños nombran: Uno, dos, tres, señalando cada vez a uno de ellos. Estos niños han intuido perfectamente que al que llaman dos es aquel que haría una cantidad de dos por acumulación y, así, sucesivamente. Jugaremos varias veces con elementos que no se puedan apilar hasta consolidar la técnica.

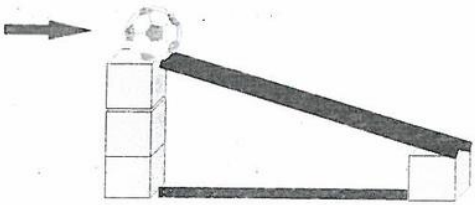
Otros niños, sin embargo, se empenarán en ponerlos en forma de torre, diciendo algo parecido a: "no se puede poner", "no vale",... Aceptaremos lo que nos digan, sin indicar ayuda alguna en absoluto.

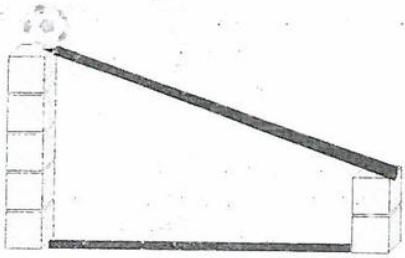
Otra técnica, consistirá en utilizar elementos que se puedan posicionar verticalmente, pero que, ahora, no lo estén, y pedir a los niños que respondan a la pregunta: ¿Cuántos...?, sin utilizar las manos y teniendo éstas, siempre detrás de ellos. Observaremos qué se les ocurre, estudiaremos el margen de error y acierto. También aceptaremos lo que nos digan sin indicar ayuda alguna en absoluto. Después de que el niño responda, será él quien lo coloque verticalmente para que le sirva de autocorrección.

Otra técnica, más fácil que las anteriores, consiste en contar elementos que se puedan apilar verticalmente formando torres. Una vez los hayamos contado y sepamos cuántos hay, provocaremos intencionadamente el derrumbe de la torre, invitando al niño a responder a la pregunta: cuántos hay. Ocurrirá lo siguiente: Unos niños dirán el número que recuerdan y no contarán de nuevo; otros, contarán construyendo de nuevo la torre; y, otros, señalarán cada elemento contando correctamente, sin necesidad de apilar.

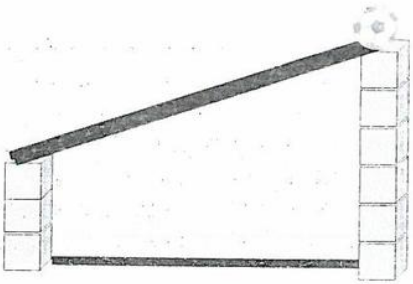
3.3 ORDENAR

Llegados a este punto podemos comparar cantidades de elementos que se disponen verticalmente en dos torres. Tiene que aprender el niño: dónde hay más, dónde hay menos, o, cuándo en una torre hay tantos como en la otra.

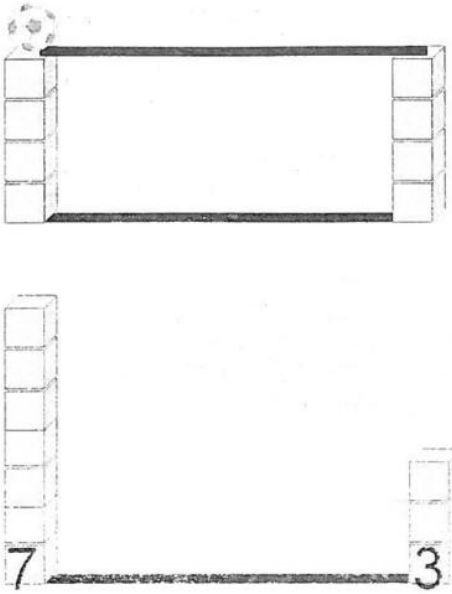




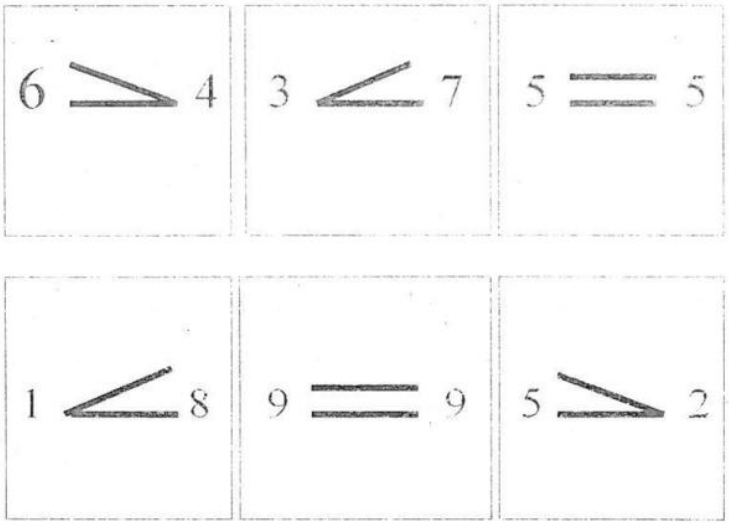
Jugaremos con una pelota y una rampa a modo de tobogán. Si sabemos dialogar con el niño, mediante claros ejemplos y contraejemplos[6], rápidamente descubrirá los símbolos comparativos: mayor que, menor que o igual.



6 Vease Fernández Bravo, 2013, págs.105-111: *Didáctica de la Matemática en Educación Infantil.*



El niño de Educación Infantil puede interpretar correctamente los signos "mayor que" y "menor que", pero no por ello debemos obligarle a dibujarlos: acción difícil e innecesaria.



3.4 DESCOMPONER

Como estamos trabajando y aprendiendo a través de la técnica de conteo, todo lo que aquí se plantea se hará contando. Se permitirá al niño que cuente tantas veces como quiera los distintos grupos de elementos que aparezcan en las posibles descomposiciones que trabajemos, con torres, bolsas, etc.

La experiencia de aula me ha enseñado que antes de exigir al niño composición alguna (3+2=), tenemos que permitir que descompongan (5=). En primer lugar, descomponer; luego, componer. Es más fácil para el niño montar las piezas que componen un juguete si previamente lo ha desmontado, que montarlo sin que antes lo haya desmontado. Por otro lado, debemos observar que en los primeros ejercicios que se hacen sobre clasificaciones, se parte de un todo, que se va descomponiendo; así, por ejemplo: Triángulos, que se descomponen, por ejemplo, en: rojos o amarillos.

Dirigiremos nuestra actividad a partir de elementos apilados en forma de torre, supongamos, por ejemplo: una torre de cinco cubos. Una vez el niño sabe cuántos elementos hay, descompondremos esa torre, en otras dos cualesquiera, obteniendo así, y buscando siempre, las mínimas parejas de sumandos de un número cualquiera; en este caso, las del número cinco serían: 5=4+1; 3+2.

También podemos jugar con dos bolsas, indicándoles a los niños que cojan los cubos de esa torre, ya contada, y los guarden en las dos bolsas, de tal forma que en las dos haya siempre cubos. Después contarán los cubos que tienen en una bolsa y en la otra. Anotaremos ambos números en la pizarra y volveremos a construir una torre con todos esos cubos. Supongamos, como ejemplo, que partiendo de cinco, han puesto 3 en una bolsa y 2 en otra, en ese momento les diremos a los niños: "A cinco también se le puede llamar tres más dos" (Mientras escribimos en la pizarra: 5=3+2). Después les diremos este dibujo (5=3+2) se lee: "Cinco es igual a tres más dos" También podríamos expresarnos, y según la descomposición elegida por el niño: "A cinco también se le puede llamar: cuatro más uno" (Mientras escribimos en la pizarra: 5=4+1). Después les diremos este dibujo (5=4+1) se lee: "Cinco es igual a cuatro más uno" Evitaremos que los niños jueguen con

descomposiciones de más de dos sumandos. Si partimos de las sumas de dos y sólo dos sumandos el trabajo[7] se queda reducido considerablemente:

$$2 = 1 + 1$$

$$3 = 2 + 1$$

$$4 = 3 + 1;\ y,\ 2 + 2$$

$$5 = 4 + 1;\ y\ 3 + 2$$

Obsérvese que no es necesario amargar al niño con más descomposiciones, esas son todas, podríamos decir, a partir de las cuales, como descomposiciones básicas, se podría trabajar matemáticamente. Mediante una dinámica de relaciones, se pueden ir sustituyendo las descomposiciones aprendidas. Así, se sabe que 5 = 4 + 1, pero como también sabemos que cuatro es igual a 3 + 1, o, 2 + 2, podremos sustituir y expresar cinco como: 3 + 1 + 1; o, como: 2 + 2 + 1. Pero como sabemos que 3 = 2 + 1, podremos seguir sustituyendo y expresar cinco, por ejemplo, como: 2 + 1 + 1 + 1.

Idénticos razonamientos podríamos aplicar a la forma de proceder con otros números de una cifra, partiendo de sus descomposiciones básicas:

$$6 = 5 + 1;\ 4 + 2;\ 3 + 3$$

$$7 = 6 + 1;\ 5 + 2;\ 4 + 3$$

$$8 = 7 + 1;\ 6 + 2,\ 5 + 3,\ 4 + 4$$

$$9 = 8 + 1,\ 7 + 2;\ 6 + 3;\ 5 + 4$$

El aprendizaje de estas descomposiciones básicas es objetivo principal en la enseñanza y, por tanto, damos por buenos aquellos procedimientos que lo consigan, entendiendo por conseguir no sólo el correcto saber, sino el querer saberlo y el sentirse bien haciéndolo. El buen uso de los números en color o regletas ayuda considerablemente a este aprendizaje, así como cualquier otro material, que por su estructura permita generar esas descomposiciones con la manipulación del alumno y descubrirlas por sus

7 La optimización, eficacia y rentabilidad del trabajo didáctico consiste en buscar técnicas que permitan: disminuir el contenido y aumentar el conocimiento.

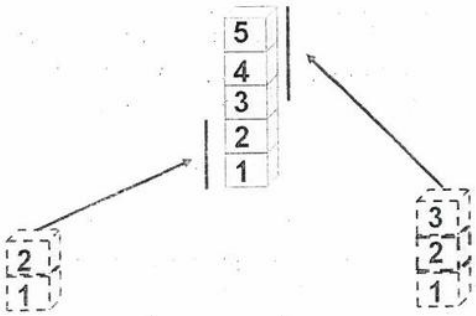
propios medios. Posteriormente, podremos ayudar a su memorización con cuentos[8], canciones, adivinanzas, etc.

3.5 COMPONER

Se permitirá al niño que cuente tantas veces como quiera los distintos grupos de elementos que aparezcan.

Una vez que el niño ha descompuesto y descubierto nuevas expresiones numéricas de un número dado, podemos partir de éstas para buscar, ahora, el número que indica el total de elementos: su suma.

a) Partiremos de dos torres de tal forma que todos y cada uno de sus elementos, representen la unidad de medida; es decir, sean independientes. Así, por ejemplo: una torre de tres cubos y otra de dos.



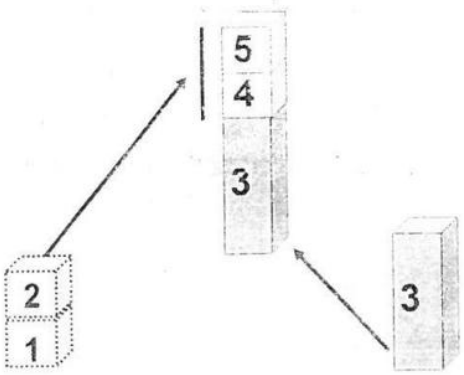
8 Existen cuentos como "El hipopótamo gracioso y fuerte", "La tortuga Botarruga", "La caja de numeros I y II", publicados por la editorial CCS de Madrid que ayudan por su aplicación a la retención de las descomposiciones básicas.

El primero, facilita una estructura de composición-descomposición, que permite trabajar posteriormente numéricamente partiendo de un número cualquiera: al hipopótamo se le van poniendo restricciones. No puede decir ocho tiene que decir 5+3, pero luego no puede decir cinco para posteriormente no poder decir tres y así, por ejemplo, sucesivamente.

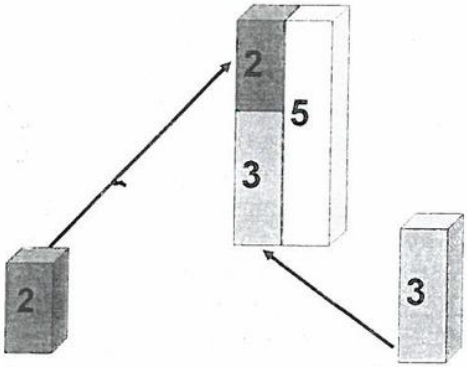
El segundo permite retener cantidad intelectual y establecer libres descomposiciones para identificar una cantidad.

Pediremos que el niño investigue cuántos elementos hay en total, construyendo, con las dos torres presentadas, una sola torre.

b) Partiremos de dos torres, de tal forma que una de ellas represente las unidades a las que ésta equivale, y la otra tenga los elementos independientes. Así, por ejemplo: una torre de una sola pieza que equivalga a tres cubos y otra de dos piezas que equivalga a dos. Pediremos a los niños que nos digan cuántos cubos hay en total. Observemos que cuando el niño apile esas torres en una sola, no necesitará contar los elementos de la torre de una pieza, pues ya sabe que hay tres, por lo que contará los otros elementos a partir de tres. (Para estas actividades es bueno el material Números en Color o regletas de Cuisenaire)



c) Partiremos de dos torres, de tal forma que ambas representen las unidades a las que éstas equivalen. Así, por ejemplo: una torre de una sola pieza que equivalga a tres cubos y otra de una sola pieza que equivalga a dos. Pediremos a los niños que nos digan cuántos cubos hay en total. De esta forma ayudaremos a la retención intelectual de las composiciones que nos interesan, dando un paso más en la formación matemática.



Daremos los pasos a), b) y c) descritos anteriormente, sin necesidad de apilar los elementos en forma de torre. Trabajando horizontalmente, y en cualquier otra posición.

Piaget y Szeminska (1941) utilizan tres técnicas para estudiar la composición aditiva: a) identidad del todo a pesar de las distintas composiciones aditivas de sus partes; b) igualación de dos cantidades, y c) partición del todo en dos partes equivalentes.

3.6 OBTENER EL RESULTADO DE UNA RESTA MEDIANTE CONTEO

Trabajaremos dos ideas fundamentales: por un lado, la idea de sustracción manipulando elementos que se cuenten; y, por otro la idea de disminución. El éxito de la intelectualización de estas ideas depende del dominio de las parejas de sumandos que equivalen a un número de una cifra.

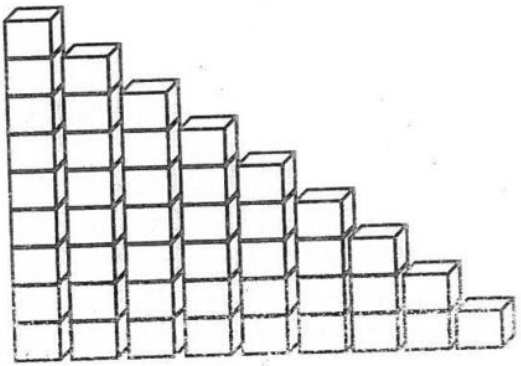
Idea de sustracción

Contaremos una torre de elementos cualquiera; supongamos cinco (5) (uno, dos, tres, cuatro y cinco). Después les diremos que vamos a tomar dos (2) -por ejemplo-. Y, de esa torre de cinco, contaremos dos (uno, dos) y los tomaremos. Después les diremos que vamos a ver los que quedan en la torre y los contaremos de nuevo (uno, dos , tres); quedan tres (3).

Idea de disminución

Esta idea de disminución la abordaremos, en su proceso, desde dos procedimientos distintos.

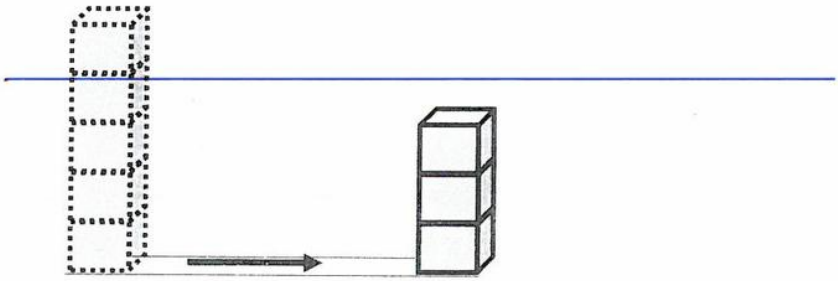
a) A partir de una torre de elementos le preguntaremos al niño: ¿Cuántos elementos hay? Una vez nos haya contestado correctamente (supongamos: cinco), quitamos uno -un elemento- de esa torre. Nos dirigiremos al niño diciéndole: "Entonces decimos que hay cinco". Él negará nuestra afirmación debido a que ha visto cómo cogíamos uno. Entonces le preguntaremos: ¿Habrá más o menos?[9], ¿Cuántos hay ahora? Observaremos si el niño vuelve a contar o, simplemente, enuncia el número inmediatamente anterior a cinco. Lo que buscamos es que enuncie el número inmediatamente anterior sin necesidad de contar. Pero, si vuelve a contar no diremos nada en absoluto y seguiremos trabajando. El profesor/a trabajara de la misma forma quitando siempre uno. para permitir que el niño sea consciente del conteo hacia atrás.



b) A partir de una torre cualquiera de elementos, le preguntaremos al niño: ¿Cuántos elementos hay? Les mandaremos cerrar los ojos o utilizaremos cualquier procedimiento que les impida ver lo que hacemos.

9 En este momento no preguntaremos: "cuántas más" o, "cuántas menos".

Nosotros quitaremos de la torre un número de elementos, supongamos, para seguir la actividad, que partimos de una torre de cinco elementos. El niño ya sabe que hay cinco, posteriormente quitamos, por ejemplo, dos.



Cuando el niño mire la nueva torre, le haremos tres preguntas:

- ☺ ¿Cuántos elementos había?
- ☺ ¿Cuántos hay ahora?
- ☺ ¿Cuántos hemos cogido nosotros?

Digan lo que digan, nosotros nos limitaremos a enseñarles, después de que ellos respondan, los elementos que hemos tomado. Ellos sabrán entonces si lo que han respondido es, o no, correcto.

Esta actividad pretende desafiar a la mente del niño para que sea consciente de que la resta es la operación inversa de la suma. Esta actividad se hará con varios ejercicios, empezando con torres de 2, 3, 4, y 5 elementos, respectivamente.

Después trabajaremos con torres de 6, 7, 8 y 9 elementos. Una vez dominada la actividad, se trabajará con grupos de elementos en cualquier posición sin necesidad de que formen torre alguna.

Para Bermejo y Lago (1987) "[...] la adición, se trata de una operación que aúna las partes en un todo", pero esto es discutible como veremos en la segunda parte de este libro. Más discutibles son las palabras de Brissiaud, (1993) *"la sustracción consiste en contar lo que queda [...], el niño que empieza a contar desde el principio para poder llegar al resultado: no ha desarrollado el significado numérico. Ejemplo: el niño tiene 6 monedas y le quita 2, vuelve a contar todo para poder llegar al resultado"*. El niño lo hace

correctamente porque está contando y, contando, no puede hacerlo de otra manera. ¿Cómo va a consistir la sustracción en contar lo que queda? Se está confundiendo el qué es con el cómo se hace. La resta es la operación que permite encontrar el número que sumado al minuendo da como suma el sustraendo. Yo no sé cómo se resta, pues supongo que habrá infinitos procesos intelectuales que establezcan adecuadas relaciones para llegar al resultado correcto. Pero sí sé que una forma de llegar a este resultado es contar lo que queda. Haciendo eso no estoy restando, sino contando. Téngase esto en cuenta.

3.6.1. LA REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA

La representación matemática de la resta como sustracción no es fácil para el niño, debido a que el sustraendo se representa como cantidad distinta, sin serlo; ya que ésta lo que indica es la acción que se realiza sobre la cantidad total.

Así, por ejemplo en: $5 - 3$, el 5 indica la totalidad de elementos y el 3 la acción que sobre ese 5 se realiza. Como vemos no existen dos cantidades diferentes, ya que el 3 es parte del 5. Lo que existe es exclusivamente 5. Procederemos entonces, como ejemplo, de la siguiente forma para la intervención educativa, o, de otra cualquiera que permita diferenciar con claridad el significado detallado anteriormente:

Tenemos preparada una bolsa vacía.

La orden es: "toma cinco caramelos"

La pregunta es: ¿cuántos caramelos tienes? (cinco)

La siguiente orden es: "de esos caramelos que tienes echa tres a la bolsa"

La pregunta es: ¿cuántos caramelos tienes ahora? (dos)

Niños/as: Tenemos tres.

(Nosotros les engañaremos y les diremos que tienen dos, ya que les habíamos dicho que devolviesen tres. Les escucharemos. Les seguiremos engañando, una y otra vez, tanto sobre lo que tomen como sobre lo que devuelven, hasta que vean la necesidad de escribir lo que decimos).

Profesor/a: tomen seis caramelos y..., (escribimos el número 6), ahora, de esos 6 caramelos echen cuatro a la bolsa..., (también ahora escribiremos el número 4) Cuando les preguntemos por los caramelos que les quedan nos responderán dos. Nosotros diremos que eso que hemos realizado se dibuja así en matemáticas:

$$6 - 4 = 2$$

y, se lee: "seis menos cuatro es igual a dos".

Entender es dar sentido a lo que los demás dicen (diálogo exterior). Comprender es dar significado a lo que tú piensas (diálogo interior).

CAPÍTULO 4 DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES. OTROS AUTORES: DIFERENCIAS Y ANALOGÍAS

Labinowicz (1994) dividió el proceso de conteo en tres niveles:

1. **El conteo de rutina**, se recita oralmente la serie numérica. En este nivel se puede observar: un conteo convencional y estable (uno dos, tres, uno, dos, tres); un conteo no convencional pero estable (nueve, once, ocho, nueve, once, ocho); y, un conteo al azar y no estable, (tres, ocho, doce, quince, tres, ocho, doce, quince).
2. **Contar objetos o eventos**, se establece una correspondencia biunívoca entre el objeto que se cuenta y el nombre o número que se le asigna, esta acción se denomina *enumerar*.
3. **Atribución de significados numéricos**, la última palabra contada se considera como el grupo total de elementos. Por ejemplo: en un conjunto de cinco elementos el 5 es la última palabra y la que designa el total de elementos del mismo, y a la vez un número para contar.

Gelman y Gallistel (1986) proponen la existencia de 5 principios para la adquisición del conteo:

1. Principio de correspondencia biunívoca: todos los elementos deben ser contados una sola vez.
2. Principio de orden estable: las palabras-número deben ser utilizadas en un orden concreto y estable.

3. Principio de cardinalidad: la última palabra-número que se emplea en el conteo sirve también para representar el número de elementos que hay.
4. Principio de abstracción: los principios de conteo pueden ser aplicados a cualquier conjunto de objetos.
5. Principio de intrascendencia del orden: el resultado del conteo no varía aunque se altere el orden empleado para enumerar los objetos.

Nuestras fases tienen matices significativos de diferenciación con las anteriores. Observando a niños de dos años veo cómo se expresan correspondiendo con cada elemento la palabra "uno". Así para un conjunto de tres elementos se expresan de forma natural: "uno", "uno", "uno". Para enseñarles a contar necesito que entiendan algunos principios y acepten algunos convencionalismos. Un claro convencionalismo es el nombre de los números naturales (uno, dos, tres,...). Desde mi punto de vista creo que, atendiendo a los principios de Gelman y Gallistel (1986): el principio 2 iría antes que el 1; el principio 5 permitiría intelectualizar el principio 3, por lo que necesariamente debe ir antes; la correspondencia biunívoca debería utilizar en los inicios elementos que se puedan apilar; el *principio de abstracción* no lo considero un principio de adquisición porque a mi juicio no es independiente sino que está implícito en todos los demás y en la misma intelectualización. De no ser así, el *principio de abstracción* debería ser un principio que acompañe a todos los procesos que enumeren un conjunto de pasos para cualquier adquisición.

Recorramos de nuevo nuestras cuatro fases determinando acciones claras para su aplicación:

1. **Principio de verbalización (CANCIÓN):** nombrando el sonido en el orden correcto, sin asignar correspondencia alguna con ningún objeto.
2. **Principio de independencia (SEPARACIÓN):** una vez superada la fase anterior en al menos tres sonidos (uno, dos, tres) se les enseña a separar esos sonidos dotándolos en la mente del niño de independencia diferenciándolos entre sí, sin asignar correspondencia alguna con ningún objeto.
3. **Principio de correspondencia (CORRESPONDENCIA):** se establece una correspondencia en vertical solo con una cantidad de tantos elementos como los sonidos haya aprendido de la fase anterior. Las

investigaciones que he realizado y las que he podido seguir sobre el conteo en otros muchos autores, -por citar algunos- (Piaget, 1967; Groen y Resnick, 1977; Gelman y Meck, 1983; Fuson, Pergament, Lyons, Hall, 1985; Gelman y Gallistel, 1986; Bermejo, 1990; Wynn, 1990; Gelman, 1993; Serrano y Denia, 1994; Kamii, 1995; Nunes y Bryant, 1997; Resnick y Ford, 1998; Bryant, 2003; Feldman, 2005; Gelman, 2006; Gallardo, 2010) revelan siempre mayor dificultad para el niño que cuenta si los elementos se acomodan en un arreglo circular o en desorden, en vez de disponerlos linealmente. Es por esto muy importante la correspondencia en vertical. Esta colocación evita esas dificultades de conteo y permite intuir fácilmente que la cantidad no cambia aunque cambien de lugar los elementos. Al posicionar los elementos en vertical se percibe la acumulación de éstos distinguiendo rápidamente por la altura de las torres la cantidad de elementos: mayor, menor o igual. Una vez colocados los elementos en torre los dejábamos caer y eran los propios niños los que colocaban de nuevo verticalmente los elementos desordenados utilizando esta acción como mecanismo de autocorrección y comprobación. Esta colocación en vertical favorece también lo que Labinowicz (1986) llama nivel de *Atribución de significados numéricos*, y lo que nosotros llamamos *CONSECUENCIA*.

4. **Principio de cuantificación** por conteo **(CONSECUENCIA)**: Esta fase se le ofrecerá al niño que ha superado con éxito la anterior, aunque sólo sea con tres sonidos (uno, dos, tres). La consecuencia de que el último sonido pronunciado coincide con el cardinal tiene que ser informada por el adulto por ser la pregunta "¿cuántos?" y su respuesta totalmente convencional. Labinowicz (1994:73) afirma que *"cuando un niño enumera un grupo de elementos, al preguntarle ¿cuántos son? los vuelve a enumerar. Lo que significa que no ha comprendido que el último número contado representa al conjunto total y que dicho proceso se puede resumir con ese número"*. Sin embargo, he comprobado que al ser un convencionalismo el niño no puede descubrir eso por sí mismo y, necesariamente, hay que informarle de esa CONSECUENCIA. Labinowicz critica que el niño vuelva a contar cuando se le pregunta ¿cuántos?, porque el niño debe comprender que si se mueven de lugar los elementos de un conjunto la cantidad no cambia (regla de valor cardinal). Pero, ¿por qué esa acción del niño

nos permite inferir que no comprende que la cantidad no varía? ¿Qué interpreta el niño cuando le preguntan "cuántos"? ¿Quién se ha preocupado de enseñarle al niño a responder a la pregunta "cuántos"?

CONCLUSIONES:

Hemos observado que no hace falta memorizar muchos sonidos para dominar la técnica de conteo; más bien, todo lo contrario. Cuando el niño se aprende por *canción* y *separación*, tres o cuatro sonidos correctamente se le puede enseñar a contar trabajando la *correspondencia* y la *consecuencia* con esos sonidos. Una vez nos hayamos asegurado que el niño lo ha intelectualizado, repetiríamos las fases de *canción* y *separación* con otros sonidos. Nos daremos cuenta que ya no hace falta indicarle con esos nuevos sonidos las fases de *correspondencia* y *consecuencia* porque son capaces de obtener el cardinal de una nueva cantidad de objetos aplicando la estructura que tienen intelectualizada. Se ha obtenido un éxito significativamente mayor en los niños que se les ha enseñado estas fases con un número menor de sonidos en un principio.

- ***Cuántos menos sonidos retenga el niño para obtener el cardinal de una colección de objetos mediante conteo, mejor para intelectualizar la estructura cognitiva que genera en la mente la acción de contar.***
- ***El mínimo número de sonidos necesario para generar esa estructura son tres: uno, dos y tres.***
- ***Contar necesita siempre de un conjunto de elementos (real o imaginario) para establecer correspondencia. Es correcto utilizar los dedos para contar. Lo incorrecto sería pedir que no se utilicen, porque necesariamente tendríamos que hacer uso de otros elementos sustitutivos. Decir "cuento sin dedos (elementos)" es como decir: "salta sin levantar los pies del suelo".***

> No te preocupes si los resultados que obtienes en los comienzos de estas actividades no son buenos y lucha por que todos los niños lo vean bien; unos antes, otros después. Si desde un principio todos tus alumnos dicen que lo ven, o es falso y alguno miente, o es cierto y no es mérito tuyo.

Las tareas escolares tienen que ocupar el tiempo necesario con más actividad cerebral y menos espacio físico o virtual.

CAPÍTULO 5 PASOS QUE SEGUIR COMO SECUENCIA DE INTERVENCIÓN PARA CONTAR

Los siguientes objetivos orientan una secuencia que pueden servir, tanto como guía para el desarrollo del aprendizaje, como de pauta de observación para el seguimiento de lo aprendido. Es difícil conseguir un objetivo sin haber conseguido los anteriores a éste: la adquisición de uno se apoya como consecuencia en la adquisición de otro anterior.

A) NUMERACIÓN

1. Distinguir las formas de los guarismos: 1, 2, 3.
2. Reconocer, de forma libre, las distintas formas de los guarismos:1 2, 3.
3. Enunciar en orden correcto los sonidos: uno dos tres.
4. Independizar los sonidos enunciados, separándolos: - uno - dos - tres-.
5. Establecer una correspondencia biunívoca (uno-uno), entre los sonidos anteriores y grupos de hasta tres elementos dispuestos verticalmente.
6. Responder correctamente a la pregunta "cuántos" sobre un grupo de hasta tres elementos dispuestos verticalmente.
7. Asociar una cantidad de hasta tres elementos a su nombre numérico. "Enséñame dos...; enséñame tres..."

8. Asociar los guarismos 1, 2, 3, con su nombre numérico convencional: uno, dos y tres, respectivamente.
9. Asociar una cantidad de hasta tres elementos con su número, nombrándolo correctamente. Ejemplos: "Enséñame el número que representa los... que hay"; "Enséñame tantos... como indica este número: 3".
10. Distinguir las formas de los guarismos: 1, 2, 3, 4, 5, 0.
11. Reconocer de forma libre las distintas formas de los guarismos:1, 2, 3, 4, 5, 0.
12. Enunciar en orden correcto los sonidos: uno dos tres cuatro cinco.
13. Independizar los sonidos enunciados, separándolos: - uno - dos - tres - cuatro - cinco.
14. Establecer una correspondencia biunívoca (uno-uno), entre los sonidos anteriores y grupos de hasta cinco elementos dispuestos verticalmente.
15. Reconocer e identificar el número cero (0) como ausencia de elementos, nombrándolo y asociándolo correctamente.
16. Responder correctamente a la pregunta "cuántos" sobre un grupo de hasta cinco elementos dispuestos verticalmente.
17. Asociar una cantidad de hasta cinco elementos a su nombre numérico. "Enséñame dos...; enséñame cinco...".
18. Asociar los guarismos 1, 2, 3, 4, 5 con su nombre numérico convencional: uno, dos, tres, cuatro y cinco, respectivamente.
19. Asociar una cantidad de hasta cinco elementos con su número, nombrándolo correctamente. Ejemplos: "Enséñame el número que representa los... que hay"; "Enséñame tantos... como indica este número "5".
20. Responder correctamente a la pregunta "cuántos" sobre un grupo de hasta cinco elementos colocados en cualquier posición.
21. Distinguir las formas de los guarismos: 1, 2, 3, 4, 5, 0, 6, 7, 8 y 9.
22. Reconocer de forma libre las distintas formas de los guarismos: 1, 2, 3, 4, 5, 0, 6, 7, 8 y 9.

23. Enunciar en orden correcto los sonidos: uno dos tres cuatro cinco seis siete ocho nueve.
24. Independizar los sonidos enunciados, separándolos: - uno - dos - tres- cuatro - cinco - seis - siete - ocho - nueve.
25. Establecer una correspondencia biunívoca (uno-uno), entre los sonidos anteriores y grupos de hasta nueve elementos dispuestos verticalmente.
26. Responder correctamente a la pregunta "cuántos" sobre un grupo de hasta nueve elementos dispuestos verticalmente.
27. Asociar una cantidad de hasta nueve elementos a su nombre numérico. "Enséñame ocho...; enséñame seis...".
28. Asociar los guarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 con su nombre numérico convencional: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve, respectivamente.
29. Asociar una cantidad de hasta nueve elementos con su número, nombrándolo correctamente. Ejemplos: "Enséñame el número que representa los... que hay"; "Enséñame tantos... como indica este número "5".
30. Responder correctamente a la pregunta "cuántos" sobre un grupo de hasta nueve elementos colocados en cualquier posición.
31. Enunciar en orden correcto los sonidos: uno dos tres cuatro cinco seis siete ocho nueve diez diez y uno (once) diez y dos (doce)...
32. Independizar los sonidos enunciados, separándolos: - uno - dos - tres - cuatro - cinco - seis - siete - ocho - nueve - diez - diez y uno (once) - diez y dos (doce)...
33. Establecer una correspondencia biunívoca (uno-uno), entre los sonidos anteriores y grupos de hasta... elementos dispuestos verticalmente.
34. Responder correctamente a la pregunta "cuántos" sobre un grupo de hasta... elementos dispuestos verticalmente.
35. Asociar una cantidad de hasta... elementos a su nombre numérico. "Enséñame...; enséñame..."
36. Responder correctamente a la pregunta "cuántos" sobre un grupo de hasta... elementos colocados en cualquier posición.

B) ADICIÓN

1. Utilizar material para calcular la suma de dos números cuyo resultado es menor o igual que tres, cuando esos dos números se expresan de forma oral. ("¿Cuál es el resultado de sumar dos más uno?").
2. Utilizar material para calcular la suma de dos números cuyo resultado es menor o igual que tres, cuando la expresión matemática se presenta de forma escrita. ("1 + 1 = ")
3. Calcular la suma de dos números cuyo resultado es menor o igual que tres, sin material alguno, cuando la expresión matemática se presenta de forma escrita. ("2 + 1 = ").
4. Calcular la suma de dos números cuyo resultado es menor o igual que tres, sin material alguno, cuando esos dos números se expresan de forma oral. (¿Cuál es el resultado de sumar uno más uno?").
5. Utilizar material para calcular la suma de dos números cuyo resultado es menor o igual que cinco, cuando esos dos números se expresan de forma oral. ("¿Cuál es el resultado de sumar dos más dos?").
6. Utilizar material para calcular la suma de dos números cuyo resultado es menor o igual que cinco, cuando la expresión matemática se presenta de forma escrita. ("4 + 1 = ").
7. Calcular la suma de dos números cuyo resultado es menor o igual que cinco, sin material alguno, cuando la expresión matemática se presenta de forma escrita. ("2 + 3 = ").
8. Calcular la suma de dos números cuyo resultado es menor o igual que cinco, sin material alguno, cuando esos dos números se expresan de forma oral. ¿Cuál es el resultado de sumar dos más dos?").
9. Utilizar material para calcular la suma de dos números cuyo resultado es menor o igual que siete, cuando esos dos números se expresan de forma oral. ("¿Cuál es el resultado de sumar cinco más dos?").
10. Utilizar material para calcular la suma de dos números cuyo resultado es menor o igual que siete, cuando la expresión matemática se presenta de forma escrita. ("4 + 2 = ").

11. Calcular la suma de dos números cuyo resultado es menor o igual que siete, sin material alguno, cuando la expresión matemática se presenta de forma escrita. ("4 + 3 = ").
12. Calcular la suma de dos números cuyo resultado es menor o igual que siete, sin material alguno, cuando esos dos números se expresan de forma oral. (¿Cuál es el resultado de sumar cinco más dos?").
13. Utilizar material para calcular la suma de dos números cuyo resultado es menor o igual que nueve, cuando esos dos números se expresan de forma oral. ("¿Cuál es el resultado de sumar dos más seis?").
14. Utilizar material para calcular la suma de dos números cuyo resultado es menor o igual que nueve, cuando la expresión matemática se presenta de forma escrita. ("8 + 1 = ").
15. Calcular la suma de dos números cuyo resultado es menor o igual que nueve, sin material alguno, cuando la expresión matemática se presenta de forma escrita. ("5 + 3 = ").
16. Calcular la suma de dos números cuyo resultado es menor o igual que nueve, sin material alguno, cuando esos dos números se expresan de forma oral. (¿Cuál es el resultado de sumar dos más seis?").
17. Representar, manipulando material, situaciones problemáticas sencillas en las que intervenga la suma, y cuyo resultado sea un número menor o igual que 9.
18. Escribir la expresión matemática que resuelve las situaciones problemáticas que se han representado anteriormente, mediante la manipulación de material.

C) SUSTRACCIÓN

1. Utilizar material para calcular la diferencia de dos números menores o iguales que tres, cuando esos dos números se expresan de forma oral. ("¿Cuál es el resultado de restar dos menos uno?").
2. Utilizar material para calcular la diferencia de dos números menores o iguales que tres, cuando la expresión matemática se presenta de forma escrita. ("2 - 1 = ").

3. Calcular la diferencia de dos números menores o iguales que tres, sin material alguno, cuando la expresión matemática se presenta de forma escrita. ("2 - 1 = ").
4. Calcular la diferencia de dos números menores o iguales que tres, sin material alguno, cuando esos dos números se expresan de forma oral. ("¿Cuál es el resultado de restar dos menos uno?").
5. Utilizar material para calcular la diferencia de dos números menores o iguales que cinco, cuando esos dos números se expresan de forma oral. ("¿Cuál es el resultado de restar cinco menos dos?").
6. Utilizar material para calcular la diferencia de dos números menores o iguales que cinco, cuando la expresión matemática se presenta de forma escrita. ("4 - 1 = ").
7. Calcular la diferencia de dos números menores o iguales que cinco, sin material alguno, cuando la expresión matemática se presenta de forma escrita. ("5 - 3 = ").
8. Calcular la diferencia de dos números menores o iguales que cinco, sin material alguno, cuando esos dos números se expresan de forma oral. ("¿Cuál es el resultado de restar cuatro menos dos?").
9. Utilizar material para calcular la diferencia de dos números menores o iguales que siete, cuando esos dos números se expresan de forma oral. ("¿Cuál es el resultado de restar seis menos dos?").
10. Utilizar material para calcular la diferencia de dos números menores o iguales que siete, cuando la expresión matemática se presenta de forma escrita. ("7 - 2 = ").
11. Calcular la diferencia de dos números menores o iguales que siete, sin material alguno, cuando la expresión matemática se presenta de forma escrita. ("6 - 3 = ")
12. Calcular la diferencia de dos números menores o iguales que siete, sin material alguno, cuando esos dos números se expresan de forma oral. ("¿Cuál es el resultado de restar seis menos dos?").
13. Utilizar material para calcular la diferencia de dos números menores o iguales que nueve, cuando esos dos números se expresan de forma oral. ("¿Cuál es el resultado de restar siete menos seis?").

14. Utilizar material para calcular la diferencia de dos números menores o iguales que nueve, cuando la expresión matemática se presenta de forma escrita. ("8 - 1 = ").
15. Calcular la diferencia de dos números menores o iguales que nueve, sin material alguno, cuando la expresión matemática se presenta de forma escrita. ("9 - 3 = ").
16. Calcular la diferencia de dos números menores o iguales que nueve, sin material alguno, cuando esos dos números se expresan de forma oral. ("¿Cuál es el resultado de restar nueve menos tres?").
17. Representar, manipulando material, situaciones problemáticas sencillas en las que intervenga la sustracción, y cuyo resultado sea un número menor o igual que 9.
18. Escribir la expresión matemática que resuelve las situaciones problemáticas que se han representado anteriormente, mediante la manipulación de material.

2 PARTE

ENSÉÑAME A "NO CONTAR"

INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA SOBRE LA ADQUISICIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO SIN NECESIDAD DE CONTAR

*"**El genio del corazón**,[...] maestro en el arte de no parecer lo que es y de tomar una apariencia que hace que sus seguidores se vinculen a él de una forma cada vez más radical e íntima; el genio del corazón, que hace callar y enseña a escuchar a todos los vocingleros y engreídos, que pule las almas toscas, haciéndolas gozar de un nuevo deseo: el de quedarse inmóviles como un espejo, para que se refleje en ellas el profundo cielo; el genio del corazón, que enseña a las manos torpes e impacientes el arte de vacilar y coger las cosas con mayor delicadeza; el que es capaz de vislumbrar, tras la densa capa de opaco hielo, el tesoro escondido y olvidado, la gota de bondad y de suave espiritualidad; el que es como una varita mágica que sabe detectar hasta el más mínimo grano de oro hundido largo tiempo en una cárcel de abundante cieno y arena; el genio del corazón que enriquece a todo el que se le acerca, no con un don gratuito e inesperado, ni como un bien ajeno que le oprima, sino más rico de sí, más renovado, como algo que ha sido removido, creado y desenterrado ..."*

***NIETZSCHE**, Más allá del bien y del mal; aforismo 295.*

Nos han educado para *acertar*, por eso es muy difícil que estemos preparados para aprender.

CAPÍTULO 6 ARGUMENTOS LÓGICOS, CIENTÍFICOS Y PEDAGÓGICOS: CONTAR Y "NO CONTAR"

En qué medida aquello que consideramos error es en realidad un error. Brissiaud (1993) nos dice que "al inicio el niño tiene un grupo de elementos (2), añade 2 elementos, vuelve a contar desde el primer elemento, ya *que todavía no ha desarrollado el significado numérico*. Ejemplo: el niño cuenta 4 monedas, añade 2 monedas y vuelve a contar todo". Admito totalmente que los niños vuelven a contar todo cuando a un grupo de elementos añaden más elementos pero no puedo admitir en absoluto la causa que se escribe "ya que todavía no se ha desarrollado el significado numérico". No estoy de acuerdo con esta sentencia porque he observado que el niño reproduce lo que le hemos enseñando sobre contar.

Si contar es establecer una correspondencia biunívoca entre el sonido y los elementos, lo que hace el niño es totalmente correcto, debido a que establece la correspondencia uno-uno necesaria para contar. Así que no podemos afirmar que hacer bien lo que le hemos enseñado implique ausencia de algún sentido y significado numérico. Más tarde, he observado que los niños saben que el último sonido pronunciado coincide con el cardinal, y cuando tienen que sumar una cantidad de 3 elementos, por ejemplo, y otra de dos, empiezan desde tres porque ya saben que ahí hay tres y siguen señalando a los elementos del otro conjunto con las palabras: cinco y seis. Tampoco esto me parece dato significativo ni relevante para afirmar que ya tiene el niño el significado numérico porque haga eso, cuando lo único que aplica es algo que pertenece a la técnica de conteo.

Coincido con Oyarzun (2005) que "la habilidad de contar ejerce una gran influencia en la adquisición de las primeras habilidades aritméticas". Sin embargo, las observaciones que he realizado siguiendo a niños con estudios verticales (desde infantil a 3º-4º de primaria, -de 5 a 9 años de edad-) me hacen discrepar rotundamente con Oyarzun (2005) cuando admite que "la habilidad de contar ejerce una gran influencia en el desarrollo de estructuras lógicas, y [constituye] una potente herramienta para la resolución de problemas verbales aritméticos de estructura aditiva". Tampoco comparto las ideas de Bermejo y Lago (1991) cuando afirman que "Los procesos cognitivos implicados en el conteo preparan la adquisición de habilidades numéricas más complejas". Creo que no preparan, que en tanto no se salga o se prescinda del contar no hay desarrollo numérico.

> *Entre los tres y cinco años, el niño aprende difícilmente los cinco o seis primeros números, si se considera que el conocimiento puramente verbal de la serie de los números no corresponde a una verdadera adquisición. (Mialaret, 1967: 15)*

Skemp (1980) escribe "Contar: un artificio para encontrar el número cardinal de cualquier conjunto dado, utilizando los nombres de números, en orden, como conjuntos estándar". Contar es simplemente contar. La habilidad que se desarrolla es la de contar. Se podrá ser más hábil contando pero no por ello dejar de contar. Las estructuras lógicas que se desarrollan a través del contar se comportan en función de un procedimiento aprehendido, pero no desvelan la aplicación de relaciones y no permiten establecer inferencias que extiendan el avance matemático. Se enseñan procedimientos que permiten utilizar esa habilidad para llegar a determinados resultados numéricos. La pregunta es si conviene llegar a esos resultados o resolución de problemas mediante la técnica de conteo o -simplemente- utilizamos la técnica de conteo porque es lo único que tenemos.

Groen y Resnick (1977) son bastantes optimistas con la técnica de conteo y afirman que entre cuatro y cinco años los niños son capaces de inventar algoritmos de conteo. Yo estoy en total desacuerdo debido a que contar solo admite un algoritmo: el algoritmo de contar. Otra cosa, muy distinta, es que utilicen estrategias lógicas de resolución, llegando al resultado numérico mediante la técnica de contar. Pero hay que distinguir dos cosas: contar y razonar. Supongamos que el objetivo es pintar y el procedimiento varía. Puedo pintar de arriba abajo, en círculos, con brocha, con paño, etc. Hay entonces distintas maneras de cubrir de un color una superficie. Y esas maneras distintas no cambian en modo alguno la definición de pintar. Volviendo a

ejemplos matemáticos podríamos decir que no se puede confundir la técnica utilizada con la estrategia pensada. "Enseñar a razonar sin enseñar a contar". (Bandet, 1969: 77)

Gelman y Meck, (1983), afirman que "los niños están dotados de forma innata con los principios del conteo, principios que les permiten contar de forma no verbal (utilizando etiquetas o representaciones no verbales)". Estas afirmaciones no coinciden con mis notas de las observaciones realizadas debido a que de forma natural los niños no recurren al conteo para expresar la cantidad de un grupo de objetos. Tampoco admiten los niños que a un elemento se le pueda llamar dos y a otro tres, siendo todos ellos "uno". Entonces para ellos las palabras cambian en función de la posición del elemento (que es lo único que varía entre las palabras: dos y tres), y no en función de la cantidad. Me cuesta creer que el conteo sea innato en los niños. El conteo parte de algo que ya está ordenado (palabras que siguen el orden de los números naturales) y la ordenación de algo es posterior a la existencia de algo. Partimos de algo convencional, entonces ¿cómo se puede explicar la relación innatismo y convencionalismo?

Sí he observado que los niños retienen conjuntos de objetos diferenciándolos entre sí; así un conjunto de dos objetos y otro de tres objetos, les ponen nombres diferentes y en verdad distinguen grupos de uno, dos, cuatro y tres elementos pero como agrupaciones independientes, y esto cambia según se presenten las cantidades colocadas, de forma simétrica o asimétrica; hay niños que distinguen una cantidad de cuatro elementos mejor que otra de tres, si la de cuatro se la coloca como dos y dos favoreciendo la percepción de la simetría (Fernández Bravo, 2012: 239-241). Por esto coincido más con Wynn (1998) cuando afirma que "los niños nacen con una habilidad para reconocer y distinguir entre uno, dos y tres, y que incluso pueden razonar sobre, y operar con, números muy pequeños (por ejemplo, reconocer que un objeto sumado a otro nos da dos y que dos menos uno es uno), todo esto antes de que desarrollen la competencia para contar verbalmente". ¿Por qué no investigar entonces el concepto de número desde las habilidades innatas sobre el sentido numérico que presentan los niños, para ver si nos lleva o no a la técnica de contar?

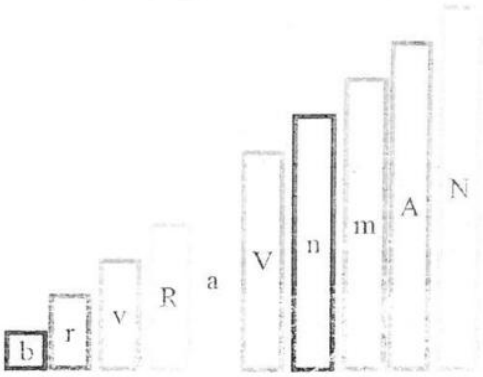
> *La mayoría de los niños comienzan su escolaridad a los cinco años siendo aparentemente capaces de llevar a cabo sumas y restas sencillas, siempre que tengan lugar en contextos que impliquen objetos, personas o acontecimientos específicos. En cambio, cuando se les plantean sumas*

> *y restas semejantes dentro de contextos en los que no existen referencias a objetos específicos, suelen mostrarse incapaces de contestar. (Hungens, 1987:60)*

¿Desarrolla la técnica de contar, más allá de lo que es contar, algún sentido matemático que permita alcanzar un significado numérico adecuado para el entendimiento y la comprensión de conceptos matemáticos posteriores? Creo que la técnica de contar no ejerce una influencia matemática positiva para la adquisición del concepto de número cardinal. Cuanto más tiempo utilice el niño la técnica de contar en las situaciones numéricas, más dificultad tendrá para desarrollar el pensamiento matemático.

Este experimento que cito a continuación lo he realizado con estudiantes de 10 a 24 años e incluso con profesores en activo. He tomado diez listones de madera de un centímetro cuadrado de base y, de uno a diez centímetros de altura (las regletas de Cuisenaire), los he ordenado de menor a mayor, desde la (b) a la (n), preguntando:

Si a la regleta blanca (b) llamo "uno", ¿a qué regleta llamo "dos"? (Siempre, y todos, contestaban: a la siguiente regleta (r).



Inmediatamente después preguntaba a partir de la siguiente condicional: si a la regleta rosa (r) llamo "uno", ¿a qué regleta llamo "dos"? (Normalmente era un 10% o, en el mejor de los casos, un 20% -pongamos-, los que contestaban diciendo: "a la regleta marrón (m)", el resto aseguraba que si a la regleta rosa (r) le llamábamos "uno", la regleta a la que llamábamos "dos" era la amarilla (a), y sin lugar a duda. Gran confusión debido a que la mente

juega con un concepto de número ordinal y no cardinal, confundiéndose entre sí; muchos creen, entonces, que el número dos es el siguiente al número uno, y esto no es siempre cierto; pero si "el número dos" es algo, esto es siempre: UNO más UNO.

Son muchos los autores que avalan la intención que quiero expresar. Baroody (1994) no garantiza que por el hecho de contar oralmente el niño pueda dar una respuesta satisfactoria cuando se le presenta un conjunto de elementos y se le pregunta "¿cuántos... hay?" "La capacidad para contar de palabra y enumerar objetos, por sí misma, no implica necesariamente una comprensión del número bien desarrollada." (Baroody, 1988).

"A la pregunta de qué cosa es el número uno, o de qué denota el signo 1, se puede responder: pues una cosa. Y si se hace notar entonces que el enunciado -el número uno es una cosa- no es una definición, porque a un lado se halla el artículo determinado y al otro el indeterminado, y que tal enunciado sólo expresa que el número uno pertenece a las cosas, pero no qué cosa es..." (Frege, 1972:13). Para Kamii (1995:16, 27): "El número es una relación creada mentalmente por cada sujeto"; "es una estructura mental que se tarda mucho tiempo en construir". "El concepto de número es un concepto abstracto, que solamente existe en nuestra mente. El número no es un conjunto sino una cualidad del conjunto..." (Martínez, Bujanda y Velloso, 1981: 112). El número no es una realidad tangible, pues "no se repetirá jamás bastante que el número no es una cosa. Es una propiedad como el sonrosado de las mejillas o la oscuridad de la noche o la redondez de las curvas. Estas propiedades no son ni objetos reales ni sucesos" (Dienes y Holding, 1966:32). "Se acostumbra a enseñar los nombres de los números, uno tras otro, recurriendo al contar, confundiendo constantemente los nombres de los números con los números mismos. Así resulta que el niño recita los números en lugar de construirlos" (Goutard, 1966: 114).

Se hace necesario entender la diferencia entre recitar y comprender: "Los niños comienzan a contar aproximadamente a los dos años, poseen una comprensión elemental de las cantidades y a los tres años son capaces de realizar algunas operaciones en las que hay que contar. Pero es muy diferente recitar los nombres de los números de ser capaz realmente de comprender su significado" (Piaget, citado por Wilson, 1969: 472).

> *Los símbolos dieron lugar a la concepción de números tan grandes que nunca habrían podido ser descubiertos por observación directa o por enumeración. (Aleksandrov, 1994: 28)*

Para Mialaret (1967: 14-15) "Lo que llamamos desarrollo de una noción matemática, no es más que el pasaje de una experiencia vivida o de un conocimiento verbal a un plano de conciencia superior sobre el cual los datos dispersos, las adquisiciones más o menos intuitivas, se reagrupan y se estructuran progresivamente según las haga la lógica adulta. (...) Entre los tres y cinco años, el niño aprende difícilmente los cinco o seis primeros números, si se considera que el conocimiento puramente verbal de la serie de los números no corresponde a una verdadera adquisición". Starkey y Cooper (1980) fueron los primeros en demostrar que los niños de 6-7 meses de edad podían detectar cambios en el número de objetos presentados visualmente. Posteriormente, y como consecuencia, algunos autores, entre los que se encuentran Butterworth (1999) y Dehaene (1997), afirman que las personas humanas nacemos con un módulo numérico que nos permite la comprensión de cantidades y sus interrelaciones, y que servirá de asiento al posterior desarrollo de capacidades matemáticas más complejas.

Pero... no he encontrado en la literatura revisada algún programa o indicación de propuesta didáctica que iniciara al niño en la adquisición del concepto de número cardinal, sin necesidad de contar.

En general puede afirmarse que no hay cuestiones agotadas, sino hombres agotados en las cuestiones. (Ramón y Cajal, 1995: 37)

Enseñar matemáticas puede consistir en ayudar a responder a la pregunta formulada, pero sólo las aprende aquel que es capaz de demostrar la validez de la respuesta dada.

CAPÍTULO 7 PRINCIPIOS, FASES Y PASOS PARA LA ADQUISICIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO CARDINAL SIN NECESIDAD DE CONTAR

A través de las observaciones realizadas con niños de 2 a 7 años de edad durante once cursos escolares (más de diez años), se construye un programa que permite la adquisición del concepto de número cardinal sin necesidad de contar. Las investigaciones realizadas, la fundamentación, la argumentación y la explicación de este proceso didáctico se puede ver con detalle en el libro "Desarrollo del pensamiento lógico y matemático" (Fernández Bravo, 2012). Existen numerosas investigaciones y estudios sobre el conteo y, aunque son muchos los autores que se cuestionan si la técnica de contar permite un correcto desarrollo del pensamiento numérico, no he encontrado durante este tiempo ningún estudio o investigación sobre algún proceso de desarrollo cognitivo para la adquisición del concepto de número sin necesidad de contar.

Lo que leeremos en este capítulo es la presentación de los principios, fases y pasos necesarios que guían la comprensión del concepto de número como acción matemática sin necesidad de contar[10]. He querido ponerlo en este libro porque estoy convencido plenamente de lo siguiente:

10 Cualquier sujeto que quiera desprenderse de la acción de contar tendrá que pasar por esta alternativa independiente de la edad. Así lo hemos hecho con niños 9 años, de 12 años e incluso de mayor edad. Aunque no se lo crean, todos ellos nos lo han agradecido.

- ✔ Contar es una actividad matemática.
- ✔ Contar es más una necesidad social que matemática.
- ✔ Existen alternativas distintas a la actividad matemática de contar para asignar correctamente el cardinal a una cantidad de elementos.
- ✔ El concepto de número cardinal se consigue a partir de la abstracción de la actividad de contar.
- ✔ Se puede adquirir el concepto de número cardinal sin necesidad de contar.
- ✔ Contar no facilita el desarrollo del pensamiento numérico. Contar necesita siempre de un conjunto de elementos (real o imaginario). Por eso es correcto que cualquiera de nosotros utilice los dedos para contar. Lo que es incorrecto es pedir que no se utilicen, porque necesariamente tendremos que hacer uso de otros elementos sustitutivos de los dedos. Es imposible realizar la acción de contar sin establecer correspondencia con un conjunto de elementos.
- ✔ Contar no permite adquirir el concepto de número natural.
- ✔ Contar atribuye la acción de juntar para sumar y quitar para restar. Pero ni sumar es juntar, ni restar es quitar. Una cosa es que se consiga el resultado de una suma mediante conteo y otra, muy distinta, es que sumar sea juntar. La suma es un número que se obtiene de aplicar a otros números, propiedades y relaciones matemáticas.
- ✔ Contar debilita la comprensión y ejecución de las operaciones matemáticas de adición, sustracción, multiplicación y división.

Por claridad de exposición, a partir de aquí identificaré al "proceso de adquisición del concepto de número sin necesidad de contar" con la expresión "pensar numérico".

7.1 PROGRAMA PARA EL PENSAR NUMÉRICO

He encontrado tres principios básicos para desarrollar el pensar numérico:

- ✔ Principio de generación.
- ✔ Principio de asignación.
- ✔ Principio de relación.

Es necesario respetar el orden establecido en esta secuencia de principios, fases y pasos, tal y como se presenta para su ejecución.

7.1.1. PRINCIPIO DE GENERACIÓN

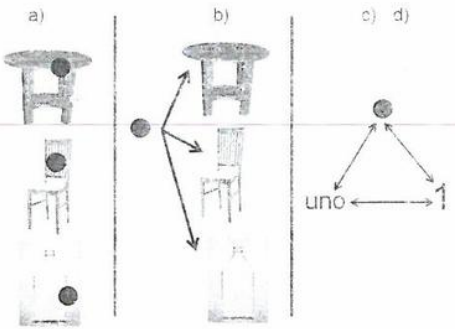
El elemento generador es el número uno (1), para llegar a esta idea aplicaremos los siguientes pasos:

a) Establecer una correspondencia biunívoca entre un elemento coordinable y distintos objetos. Hay que elegir un elemento con el que establecer correspondencias (por ejemplo: un círculo negro), al que llamaremos elemento coordinable. Se tiene varios de estos círculos negros totalmente iguales. Cuando se establece una correspondencia entre un elemento coordinable y un objeto, se logra abstraer más la unicidad del objeto percibiendo éste como un todo y no fijándose en sus partes. Se necesitan tantos elementos coordinables como objetos se hayan elegido.

b) El elemento coordinable como representante de una clase de equivalencia. Entender que el elemento coordinable puede representar a cualquier objeto, por lo que sólo necesito uno, que iré cambiando para establecer la correspondencia con otro objeto cualquiera.

c) Asociar el elemento coordinable al dibujo (1) "uno"[11]. Entender que (1) es el representante de todos aquellos objetos a los que quiera llamar "uno".

d) Asociar ["1" (uno)] a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.



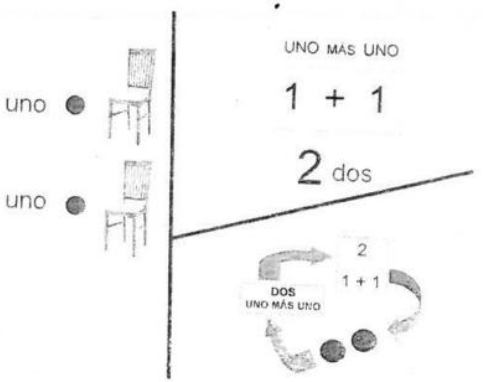
11 Esta palabra "uno" está en función del idioma: one; un; ein; um;... Así como cualquier otro nombre numérico (dos, tres, cuatro,...) estará en función del idioma correspondiente: two, three, four,...; zwei, drei, vier,...; etc.

7.1.2. PRINCIPIO DE ASIGNACIÓN

Atribuir por definición una suma determinada a un número concreto. Se trata de reconocer un número como suma de otros dos. Se expresa una cantidad de elementos, en primer lugar, a partir de dos nombres numéricos. Después, se identificará con un solo nombre a esos dos nombres numéricos. Así, por ejemplo la cantidad de seis elementos se reconocerá en primer lugar como tres y tres.

a) Asignación de 1 + 1 a 2

- Asociar la expresión "uno y uno" a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.
- Asociar la expresión "uno y uno" y la cantidad correcta de elementos, a la expresión matemática: "1 + 1", que se lee "uno más uno".
- Asociar la expresión matemática "1 + 1" (uno más uno), con el dibujo "2" (dos)
- Asociar ["2" (dos)] a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.



b) Asignación de 2 + 2 a 4

- Asociar la expresión "dos y dos" a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.
- Asociar la expresión "dos y dos" y la cantidad correcta de elementos, a la expresión matemática: "2 + 2", que se lee "dos más dos".

- Asociar la expresión matemática "2 + 2" (dos más dos), con el dibujo "4" (cuatro)
- Asociar ["4" (cuatro)] a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.

c) **Asignación de 2 + 1 a 3**

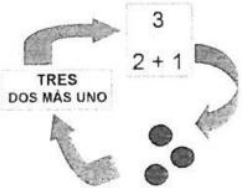
- Asociar la expresión "dos y uno" a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.
- Asociar la expresión "dos y uno" y la cantidad correcta de elementos, a la expresión matemática: "2 + 1", que se lee "dos más uno".
- Asociar la expresión matemática "2 + 1" (dos más uno), con el dibujo "3" (tres)
- Asociar ["3" (tres)] a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.

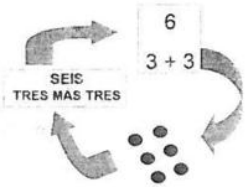
d) **Asignación de 3 + 3 a 6**

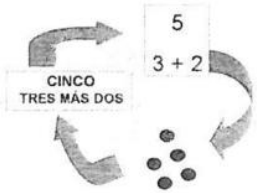
- Asociar la expresión "tres y tres" a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.
- Asociar la expresión "tres y tres" y la cantidad correcta de elementos, a la expresión matemática: "3 + 3", que se lee "tres más tres".
- Asociar la expresión matemática "3 + 3" (tres más tres), con el dibujo "6" (seis)
- Asociar ["6" (seis)] a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.

e) **Asignación de 3 + 2 a 5**

- Asociar la expresión "tres y dos" a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.
- Asociar la expresión "tres y dos" y la cantidad correcta de elementos, a la expresión matemática: "3 + 2", que se lee "tres más dos".
- Asociar la expresión matemática "3 + 2" (tres más dos), con el dibujo "5" (cinco)
- Asociar ["5" (cinco)] a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.







f) Asignación de 4 + 4 a 8

- Asociar la expresión "cuatro y cuatro" a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.
- Asociar la expresión "cuatro y cuatro" y la cantidad correcta de elementos, a la expresión matemática: "4 + 4", que se lee "cuatro más cuatro".
- Asociar la expresión matemática "4 + 4" (cuatro más cuatro), con el dibujo "8" (ocho)
- Asociar ["8" (ocho)] a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.

g) Asignación de 4 + 3 a 7

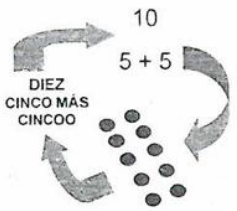
- Asociar la expresión "cuatro y tres" a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.
- Asociar la expresión "cuatro y tres" y la cantidad correcta de elementos, a la expresión matemática: "4 + 3", que se lee "cuatro más tres".
- Asociar la expresión matemática "4 + 3" (cuatro más tres), con el dibujo "7" (siete)
- Asociar ["7" (siete)] a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.

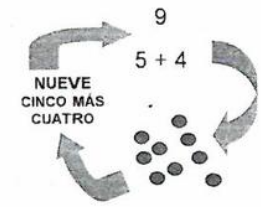
h) Asignación de 5 + 5 a 10

- Asociar la expresión "cinco y cinco" a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.
- Asociar la expresión "cinco y cinco" y la cantidad correcta de elementos, a la expresión matemática: "5 + 5", que se lee "cinco más cinco".
- Asociar la expresión matemática "5 + 5" (cinco más cinco), con el dibujo "10" (diez)
- Asociar ["10" (diez)] a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.

i) Asignación de 5 + 4 a 9

- Asociar la expresión "cinco y cuatro" a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.
- Asociar la expresión "cinco y cuatro" y la cantidad correcta de elementos, a la expresión matemática: "5 + 4", que se lee "cinco más cuatro".
- Asociar la expresión matemática "5 + 4" (cinco más cuatro), con el dibujo "9" (nueve)
- Asociar ["9" (nueve)] a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.





Las sumas que hemos atribuido a un número son las que les resultan a los niños más fáciles de retener. Esta retención de asociación suma-número se ha estudiado en distintas investigaciones. A estas parejas de sumandos con las que se identifica un número las llamaré "parejas fundamentales". La pareja fundamental que identifica al número 5, tanto es -de manera indiferente- 3+2, como 2+3. La pareja fundamental del número 5 es la suma del número 2 con el número 3, sin que influya el orden. Del mismo modo hay que entender las parejas fundamentales de los otros números[12].

El número cero se trabajará después de haber trabajado, al menos el número 1 y el número 2, de la misma forma que lo hemos trabajado anteriormente en este libro.

7.1.3. PRINCIPIO DE RELACIÓN

Establecer relaciones entre las parejas fundamentales para encontrar otras sumas de un número, de dos o más sumandos.

$1 \leftrightarrow 1;\quad 2 \leftrightarrow 1+1;$

$4 \leftrightarrow 2+2;\quad 3 \leftrightarrow 2+1;$

$6 \leftrightarrow 3+3;\quad 5 \leftrightarrow 3+2;$

$8 \leftrightarrow 4+4;\quad 7 \leftrightarrow 4+3;$

$10 \leftrightarrow 5+5;\quad 9 \leftrightarrow 5+4$

Este principio de relación tiene cuatro fases:

A. Fase de composición-descomposición.
B. Fase de cardinalización.

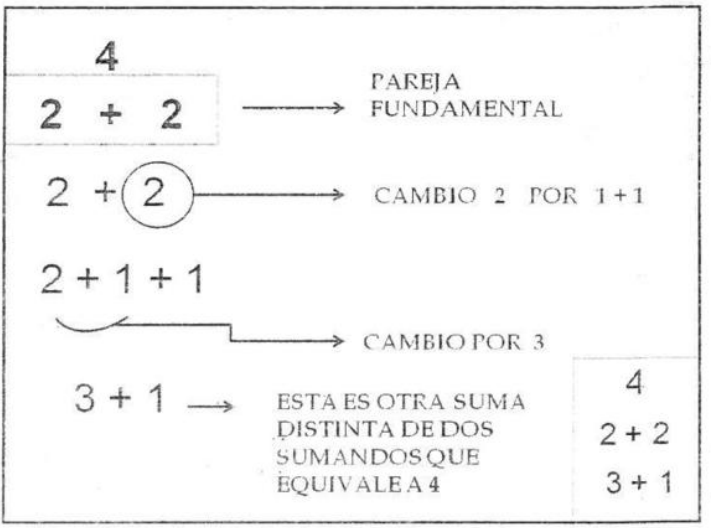
12 A partir de los cinco años los niños están preparados para reproducir con éxito la grafía de las formas numéricas y las expresiones matemáticas trabajadas. Antes de esto los niños deberían trabajar con tarjetas en las que estuvieran escritas estas expresiones, o formas numéricas en relieve. Es necesario que tengan muchas experiencias visuales y táctiles antes de reproducirlas. Sin embargo, no debe limitarse al niño, tenga la edad que tenga, que de forma libre y espontánea reproduzca esos dibujos.

C. Fase de ordenación.

D. Fase de adición.

7.1.3.1. FASE DE COMPOSICIÓN-DESCOMPOSICIÓN

Encontrar todas las sumas de dos sumandos distintos que equivalgan a un número, sin utilizar el cero. En esta fase, se procede necesariamente de esta forma: se establecen relaciones a partir de las *parejas fundamentales* cambiando siempre un número por su *pareja fundamental* o una *pareja fundamental* por su número.



5

3 + 2

1 + 2 + 2

4

1 + 4

5

3 + 2

4 + 1

6
3 + 3
2 + 1 + 2 + 1
4 + 2

6
3 + 3
3 + 2 + 1
5 + 1

6
3 +3
4 + 2
5 + 1

7
4 + 3
2 + 2 + 3
2 + 5

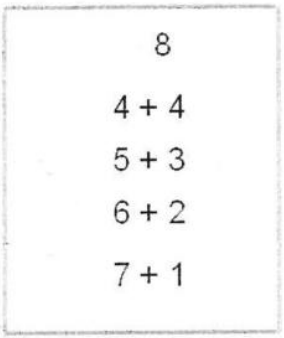
7
4 + 3
2 + 2 + 3
2 + 1 + 1 + 3
3 + 1 + 3
6 + 1

7
4 + 3
5 + 2
6 + 1

TODAS LAS SUMAS DISTINTAS DE DOS SUMANDOS QUE EQUIVALEN A 7, SIN UTILIZAR EL CERO.

8
4 + 4
2 + 2 + 2 + 2
2 + 2 + 2 + 1 + 1
3 + 3 + 2
6 + 2
3 + 3 + 2
3 + 5

8
4 + 4
4 + 2 + 2
4 + 2 + 1 + 1
4 + 3 + 1
7 + 1



9
5 + 4
2 + 3 + 4
2 + 7

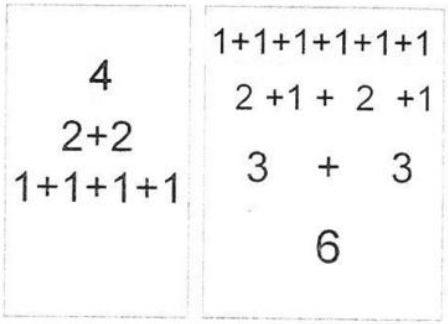
9
5 + 4
3 + 2 + 2 + 2
3 + 2 + 1 + 1 + 2
3 + 3 + 3
3 + 6

9
5 + 4
2 + 3 + 4
2 + 2 + 1 + 4
4 + 1 + 4
8 + 1

9
8 + 1
7 + 2
6 + 3
5 + 4

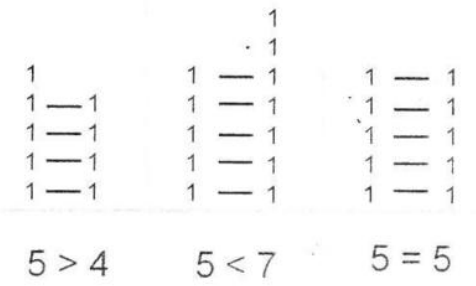
7.1.3.2. FASE DE CARDINALIZACIÓN

Encontrar las sumas de un número cuyos sumandos son todos el número 1, y viceversa. Se establecen relaciones a partir de las *parejas fundamentales* cambiando **siempre** un número por su *pareja fundamental* o una *pareja fundamental* por su número.



7.1.3.3. FASE DE ORDENACIÓN

Una vez hemos pasado por las fases de "composición-descomposición" y "cardinalización", podemos comparar números cardinales. Para saber si un número es mayor, menor o igual que otro, establecemos una correspondencia elemento a elemento entre estos dos cardinales.



En esta fase se puede proceder didácticamente de la misma forma que se indica en el apartado 3.3. "ORDENAR" de este libro.

7.1.3.4. FASE DE ADICIÓN

Si hemos seguido con éxito las fases anteriores, en esta fase ya estamos preparados para:

- ✔ expresar un número menor que diez como suma de otros,
- ✔ calcular sumas cuyo resultado sea menor que diez,
- ✔ encontrar el sumando que falta en una suma de dos sumandos,

- ✔ iniciarse en la sustracción como operación inversa de la adición,
- ✔ escribir los números que faltan en una suma de más de dos sumandos,
- ✔ resolver situaciones problemáticas sencillas de adición y sustracción.

A. Expresar un número menor que diez como suma de otros

Se deja libertad de acción para expresar sumas que equivalgan a un número de una cifra. Se pretende que el sujeto realice la actividad libremente aplicando relaciones mediante composición y descomposición, y observando la pluralidad de alternativas distintas. Así, por ejemplo:

6= 3 + 3 = 2+ 1 + 3= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 4 = (...)

7=

4=

B. Calcular sumas cuyo resultado sea menor que diez

Supongamos la siguiente suma: 1 + 2 + 3 + 1 + 2 =

·No tiene a mi juicio sentido alguno que la escuela siga indicando procedimientos para sumar. Es el que calcula la suma el que debe proceder libremente aplicando relaciones y propiedades matemáticas. ¿Qué sentido tiene decir que hay que empezar por la derecha o por la izquierda? ¿Qué sentido tiene decir, por ejemplo, que los números se van guardando en la cabeza? Hay mil formas distintas de llegar al mismo resultado. Esto es lo fascinante en matemáticas; siendo el resultado el mismo, deja campo abierto al razonamiento y la creatividad. Pero esta fascinación se entierra rápidamente cuando se indica qué hacer y cómo hacerlo anulando el desarrollo del pensamiento numérico ante la imposibilidad de acción intelectual libre.

a) 1 + 2 + 3 + 1 + 2 = 3 + 3 + 3 = 6 + 3 = 9

b) 1 + 2 + 3 + 1 + 2 = 1 + 5 + 3 = 1 + 8 = 9

c) 1 + 2 + 3 + 1 + 2 = 1 + 3 + 1 + 4 = 3 + 2 + 4 = 5 + 4 = 9

d)...

C. Encontrar el sumando que falta en una suma de dos sumandos

Así, por ejemplo: 4 + = 8; 9 = 4 + ;

(Empezar siempre por completar las parejas fundamentales, para pasar después a completar cualquier pareja de dos sumandos).

D. Iniciarse en la sustracción como operación inversa de la adición

La sustracción no existe como operación independiente. Hay que darle significado a partir de la suma. Es imposible restar si no se sabe sumar.

En una resta hay que distinguir:

- Su expresión matemática: a - b = c
- Cómo se lee: a menos b es igual a c
- Qué sentido y significado: encontrar el número que equivale a **a** sumado con b. (a - b =)
- Por qué es **c**: porque b más c es igual a **a. (b + c = a)**

Aprender y distinguir estas cuatro acciones (Encontrar, Explicar, Dibujar y Leer) a partir de los ejercicios que de forma correcta hayan realizado en el apartado anterior; así, por ejemplo:

Profesor: ¿para que de 5, qué número, hay que sumar con 3 (Encontrar).

Alumno: 2 (dos)

P: ¿Por qué es dos? (Explicar)

A: Porque 2 (dos) más 3 (tres) da 5 (cinco)

P: Sabemos que para que de 5 el número que hay que sumar con 3 es 2, y eso se dibuja así en matemáticas: 5 - 3 = 2 (Dibujar). ¿Cómo se dibuja?

A: Así: 5 - 3 = 2

P: Ese dibujo se lee: "cinco menos tres es igual a dos". ¿Cómo se lee?

A: Se lee "cinco menos tres es igual a dos".

Partiremos también de las parejas de sumandos que equivalen a un número de una cifra, mayor que el número uno. En primer lugar trabajaremos hasta el número cinco, para trabajar después con los cuatro siguientes. El niño tendrá a su disposición un material manipulativo con

el que pueda representar las descomposiciones, en dos sumandos, de un número cualquiera de una cifra. Para estas actividades es bueno el material Números en Color o regletas.

Actividad 1. El niño manipula material: trabajo oral

El profesor se expresa oralmente diciendo: para que equivalga a 5, ¿qué número hay que sumar con 3? El niño buscará, manipulando material, la descomposición del número 5, y responderá: 2. Inmediatamente después les diremos: "es 2, porque 2 más 3 equivale a 5. Seguiremos preguntando: para que equivalga a 4, ¿qué número hay que sumar con 2? Una vez el niño responda, les preguntaremos: ¿por qué?, aceptando por única respuesta. "porque 2 más 2 son 4". Seguiremos trabajando de la misma forma.

Actividad 2. El niño manipula material: trabajo escrito

El profesor se expresa oralmente diciendo: Para que equivalga a 5, ¿qué número hay que sumar con 3?, al tiempo que escribe lo que va diciendo, de la siguiente forma:

5 3

El niño buscará, manipulando material, la descomposición del número 5, y responderá: 2.

Y escribiremos el número 1 formando la terna:

5 3 2

Inmediatamente después, les diremos: "es 1, porque 1 más 4 equivale a 5". Seguiremos preguntando: Para que equivalga a 4, ¿qué número hay que sumar con 2?, al tiempo que escribimos:

4 2

Una vez el niño responda, escribiremos el número 2, formando la terna:

4 2 2

Preguntándole: ¿por qué es 2?, dando como única respuesta válida "porque dos más dos es cuatro". Seguiremos trabajando de la misma forma.

Actividad 3. El niño no manipula material

Jugaremos tal y como hemos jugado en la actividad 2, pero en esta actividad el niño no tendrá a su disposición el material, permitiendo que la respuesta la rescate de su memoria.

Actividad 4. Interpretación matemática

Iremos dibujando en la pizarra, expresándonos de la siguiente forma: Para que equivalga a 5, ¿qué número hay que sumar con 3?

5 3

Ellos dirán: 2; y lo escribiremos:

5 3 2

Después les diremos: Lo que hacemos se dibuja así

5 - 3 = 2

Y se lee: "Cinco menos tres es igual a dos". Es así, porque 2 más 3 es 5.

Distinguiremos entonces cuatro respuestas, por ejemplo, la representación (5 - 3 = 2): ¿qué significa? (Para que equivalga a 5 el número que hay que sumar con 3 es 2): ¿cómo se dibuja? (5 - 3= 2); ¿cómo se lee? (Cinco menos tres es igual a dos) ¿Por qué obtenemos ese resultado? (Porque tres más dos equivale a cinco; 3 + 2 = 5)

E. Escribir los números que faltan en una suma de más de dos sumandos

Así, por ejemplo:

a) 4 + 2 + = 8; 7 = 2 + + 4; (...)

b) 9 = 5 + + ; 7 + + = 9

c) 8 = 2 + 3 + + ; 2 + + + 3 = 7

F. Resolver situaciones problemáticas sencillas de adición y sustracción

Se dice que sumar es juntar y restar es quitar. Nada de eso es cierto y limita considerablemente la aplicación correcta de la suma y la resta a situaciones de la vida real. Obsérvese que si quito de un ramo, 2 flores por la mañana y 3 por la tarde he quitado 5 y, en modo alguno puedo representar esa situación mediante una resta.

Este arraigo tan universal de hacer corresponder la suma con juntar y la resta con quitar tiene su explicación porque se utiliza la técnica de contar para sumar y para restar. Es necesario agrupar o juntar los elementos para contarlos todos juntos y expresar el resultado de una suma mediante conteo, pero eso es contar y no sumar. Análoga explicación podríamos dar para la resta a partir de la acción de quitar.

¿Qué debemos hacer?

Delante de niños de 4 años de edad, dejaba caer al suelo una pintura de color rojo, y otra pintura de color verde y, les preguntaba cuántas pinturas se habían caído al suelo. Ellos me decían rápidamente: dos. Inmediatamente después de su respuesta, les preguntaba: ¿por qué? Ellos me daban el único porqué matemático y me decían, sin ningún titubeo: porque se han caído "uno y uno". Sí, en matemáticas dos es "uno más uno". Después buscaban una tarjeta con el número dos (2) y una tarjeta con la expresión uno más uno (1 + 1). Aprovechaba esas tarjetas para relatar otras historias. "Un niño ha perdido un cromo (uno) por la mañana y un cromo (uno) por la tarde, ¿cuántos cromos ha perdido? Del mismo modo respondían dos porque había perdido uno más uno. Como se puede comprobar estos niños podían ver la suma tanto en "tirar" como en "perder", como en... Sólo sabían que dos era "uno y uno", y allá donde veían "uno y uno" veían dos. No es cuestión de asociar una acción a una operación matemática, sino de ver la operación matemática en mil acciones diferentes.

Los resultados en la resolución de problemas matemáticos con aplicación de suma y resta mejoran significativamente, según las observaciones que hemos ido realizando con los niños, si procedemos de esta forma[13]:

a) Cuando se ha aprendido a expresar un número como suma de otros dos, el adulto les contará historias completas que expresará también matemáticamente. Se les enseñará a asociar correctamente las historias y las expresiones matemáticas.

   Así, por ejemplo:

   En una caja guardo 3 pinturas de color rojo y 2 pinturas de color verde. En esa caja he guardado 5 pinturas. (3 + 2 = 5)

b) Una vez se aprenda a asociar correctamente las historias completas y las expresiones matemáticas, se les formularán preguntas sobre esas historias tapando, de la expresión matemática, el número que corresponda con la respuesta a la pregunta formulada.

   Así, por ejemplo:.

   Javier se ha comido 2 bombones y Marta se ha comido 2 bombones. Javier y Marta se han comido 4 bombones.

   ¿Cuántos bombones se han comido Javier y Marta? (2 + 2 = (número tapado).

   ¿Cuántos bombones se ha comido Javier? ((número tapado) + 2 = 4)

c) Se les contará historias incompletas (no aparece de manera directa la respuesta a la pregunta que se formule) y se les hará preguntas que puedan responder con los datos que aparecen en la historia que se cuenta.

   Así, por ejemplo:

   Javier se ha comido 3 bombones y Marta se ha comido 2 bombones. ¿Cuántos bombones se han comido Javier y Marta?

13 Los que quieran ver cómo seguimos el proceso didáctico para la resolución de problemas matemáticos, en Educación Primaria y Secundaria, pueden leer: Fernández Bravo (2010). *La resolución de problemas matemáticos. Creatividad y razonamiento en la mente de los niños.* Madrid: Grupo Mayéutica.

EL PENSAR NUMÉRICO - CONCEPTO DE NÚMERO SIN CONTAR

PRINCIPIO DE GENERACIÓN

El elemento generador es el número uno (1)

- Establecer una correspondencia biunívoca entre un elemento coordinable y distintos objetos.
- El elemento coordinable como representante de una clase de equivalencia.
- Asociar el elemento coordinable al dibujo (1) "uno".
- Asociar ["1" (uno)] a una cantidad correcta de elementos cualesquiera, y viceversa.

PRINCIPIO DE ASIGNACIÓN

2	1+1
4	2+2
3	2+1
6	3+3
5	3+2
8	4+4
7	4+3
10	5+5
9	5+4

Número cero: 0

(Ejemplo: 2 + 1)
ASOCIAR:

- ✓"dos y uno" a una cantidad y a "2+1
- ✓"2+1" con "3" (tres)
- ✓ ["3" (tres)] a una cantidad

PRINCIPIO DE RELACIÓN

✓ **Fase de composición-descomposición**

Encontrar todas las sumas de dos sumandos distintos de: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

✓ **Fase de cardinalización**

Encontrar las sumas de (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10) cuyos sumandos son todos el número 1.

✓ **Fase de ordenación**

Ordenar los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10

✓ **Fase de adición**

Expresar un número como suma de otros.
Calcular sumas.
Encontrar el sumando que falta.
Iniciarse en la sustracción.
Escribir los sumandos que faltan en una suma.
Resolver situaciones problemáticas.

Enséñame a "contar" y... a "no contar"

7.2 SECUENCIA PROPUESTA PARA EL DESARROLLO DEL PROGRAMA SOBRE EL PENSAR NUMÉRICO

7.2.1. SECUENCIA DE CONTENIDO

Conviene trabajar en cinco etapas para el desarrollo del programa.

PRIMERA ETAPA:

Todo lo que se ha expuesto en el desarrollo del programa, y que se pueda hacer con los números: 1, 2 y 0

Principio de generación

Apartado: a); b); c) y d)

Principio de asignación

Asignación de 1 + 1 a 2

El número cero

Principio de relación

Fase de composición-descomposición

Expresar el número 2 como suma de 1 + 1, y viceversa.

SEGUNDA ETAPA:

Todo lo que se ha expuesto en el desarrollo del programa, con los números: 1, 2, 3, 4 y 0. La segunda etapa empieza cuando se domina perfectamente la primera etapa.

Principio de generación

Apartado: d)

Principio de asignación

Asignación de 2+2 a 4

Asignación de 2+1 a 3

El número cero

Principio de relación

Fase de composición-descomposición

Encontrar todas las sumas de dos sumandos distintos que equivalgan al número: 2, 3, 4.

Fase de cardinalización

Encontrar las sumas de (2, 3, 4) cuyos sumandos son todos el número 1, y viceversa.

Fase de ordenación

Ordenar de mayor a menor y de menor a mayor los números: 1, 2, 3, 4.

Fase de adición

- ✔ Expresar un número menor o igual que 4 como suma de otros.
- ✔ Calcular sumas cuyo resultado sea menor o igual que 4.
- ✔ Resolver situaciones problemáticas sencillas de adición y sustracción.

TERCERA ETAPA:

Todo lo que se ha expuesto en el desarrollo del programa, con los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 0. La tercera etapa empieza cuando se domina perfectamente la segunda etapa.

Principio de asignación

Asignación de 3 + 3 a 6.

Asignación de 3 + 2 a 5.

El número cero.

Principio de relación

Fase de composición-descomposición

Encontrar todas las sumas de dos sumandos distintos que equivalgan al número: 2, 3, 4, 5, 6.

Fase de cardinalización

Encontrar las sumas de (2, 3, 4, 5, 6) cuyos sumandos son todos el número 1, y viceversa.

Fase de ordenación

Ordenar de mayor a menor y de menor a mayor los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Fase de adición

- ✔ expresar un número menor o igual que 6 como suma de otros.

- ✔ Calcular sumas cuyo resultado sea menor o igual que 6.
- ✔ Encontrar el sumando que falta en una suma de dos sumandos, menor o igual que 6.
- ✔ Iniciarse en la sustracción como operación inversa de la adición, a partir de las sumas trabajadas.
- ✔ Resolver situaciones problemáticas sencillas de adición y sustracción.

CUARTA ETAPA:

Todo lo que se ha expuesto en el desarrollo del programa, con los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. La cuarta etapa empieza cuando se domina perfectamente la tercera etapa.

Principio de asignación

Asignación de 4 + 4 a 8

Asignación de 4 + 3 a 7

Principio de relación

Fase de composición-descomposición

Encontrar todas las sumas de dos sumandos distintos que equivalgan al número: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Fase de cardinalización

Encontrar las sumas de (2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8) cuyos sumandos son todos el número 1, y viceversa.

Fase de ordenación

Ordenar de mayor a menor y de menor a mayor los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Fase de adición

- ✔ Expresar un número menor o igual que 8 como suma de otros.
- ✔ Calcular sumas cuyo resultado sea menor o igual que 8.
- ✔ Encontrar el sumando que falta en una suma de dos sumandos, menor o igual que 8.
- ✔ Iniciarse en la sustracción como operación inversa de la adición, a partir de las sumas trabajadas.

- ✔ Escribir los sumandos que faltan en una suma menor o igual que 8.
- ✔ Resolver situaciones problemáticas sencillas de adición y sustracción.

QUINTA ETAPA:

Todo lo que se ha expuesto en el desarrollo del programa, con los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10. La quinta etapa empieza cuando se domina perfectamente la cuarta etapa.

Principio de asignación

Asignación de 5 + 5 a 10.

Asignación de 5 + 4 a 9.

Principio de relación

Fase de composición-descomposición

Encontrar todas las sumas de dos sumandos distintos que equivalgan al número: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

Fase de cardinalización

Encontrar las sumas de (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10) cuyos sumandos son todos el número 1, y viceversa.

Fase de ordenación

Ordenar de mayor a menor y de menor a mayor los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10

Fase de adición

- ✔ Expresar un número menor o igual que 10 como suma de otros.
- ✔ Calcular sumas cuyo resultado sea menor o igual que diez.
- ✔ Encontrar el sumando que falta en una suma de dos sumandos, menor o igual que 10.
- ✔ Iniciarse en la sustracción como operación inversa de la adición, a partir de las sumas trabajadas.
- ✔ Escribir los sumandos que faltan en una suma menor o igual que 10.
- ✔ Resolver situaciones problemáticas sencillas de adición y sustracción.

7.2.2. TEMPORALIZACIÓN

Téngase en cuenta que la temporalización es orientativa y que cada niño, en función de multitud de variables, requiere de un tiempo distinto. No obstante, con independencia de la edad del sujeto que aprenda, siempre será cierto que: la Quinta etapa empieza cuando se ha conseguido la Cuarta; la Cuarta cuando se ha conseguido al Tercera; la Tercera cuando se ha conseguido la segunda; y, ésta cuando se ha conseguido la Primera.

Generalizando a la mayoría de los niños podríamos establecer la siguiente correspondencia entre etapa y edad:

- Primera etapa se corresponde con 2-3 años de edad (generalmente, 3 años)
- Segunda etapa se corresponde con 3-4-5 años de edad (generalmente, 4 años).
- Tercera etapa se corresponde con 4-5-6 años de edad (generalmente, 5 años).
- Cuarta etapa se corresponde con 5-6 años de edad (generalmente, 6 años).
- Quinta etapa se corresponde con 5-6-7-8 años de edad (generalmente, 6 años)[14].

PORCENTAJE DE ÉXITO en la adquisición de los contenidos matemáticos expresados en las distintas etapas, en función de la edad. Resultados de la tabla sobre una muestra de 476 niños de colegios públicos, privados y concertados de la Comunidad de Madrid, con reparto equitativo; aproximadamente un tercio de la muestra responde a cada tipo de colegio.

14 El dominio de los diez primeros números es esencial para el desarrollo del pensamiento numérico. Sobre todo porque nuestro Sistema de Numeración es decimal. Generalmente hasta los 7 años todos los niños pueden dominar sin problemas los diez primeros números tal y como aquí se ha expuesto: estableciendo relaciones sin necesidad de contar. Carece de sentido la exigencia de avance matemático a cualquier niño que no establezca estas relaciones.

Los que estén interesados en ver como continuamos con la didáctica de los números mayores que diez, pueden leer: Fernández Bravo (2006). *El número de dos cifras*. Madrid: Editorial CCS; y, Fernández Bravo (2008). *Las cuatro operaciones matemáticas*. Madrid: Editorial CCS.

ETAPA / EDAD	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
2 AÑOS	20,6 %	0	0	0	0
3 AÑOS	92,4 %	9,4 %	0	0	0
4 AÑOS	100 %	95,6 %	14,1 %	0	0
5 AÑOS		100 %	94 %	41,2 %	17 %
6 AÑOS			100 %	92,6 %	81,1 %
7 AÑOS				100 %	95,2 %
8 AÑOS					100 %

ANEXOS

ANEXO 1 GRAFÍAS Y GUARISMOS

Tenemos que distinguir el símbolo del concepto. Las grafías de los números no son números. El número es un ente intelectual. Es importante que el niño distinga e identifique por sus propios medios y de forma libre los distintos guarismos sin que tenga que imitar lo que el adulto observa. Hay que respetar lo que el niño ve y como lo ve; así, por ejemplo, el dibujo: "1", para un niño puede ser "un palo"; para otro "un delgado" o "un siete". El dibujo "2", para un niño puede ser "una percha"; para otro "un circuito" o "un torcido". Y así, sucesivamente con todos los demás.

Permitiremos que los identifiquen siempre de la manera que ellos han elegido hasta que les digamos el nombre numérico convencional al que asociar ese dibujo con su cantidad correspondiente. Cuando el niño identifique la cantidad de dos elementos, por ejemplo, le diremos: "**dos**, se dibuja así: 2; este el dibujo del número **dos**". El niño pensará: a lo que yo he llamado "percha" ahora se le llama "dos" (y desde ese momento siempre será el dibujo del número dos).

Al plantear actividades para que los niños distingan e identifiquen por sus propios medios y de forma libre los distintos guarismos, se deben tener en cuenta en los procedimientos que utilicemos, según lo observado por la práctica en el aula:

- No empezar por formas numéricas, más bien por dibujos figurativos y muy conocidos por el niño, para que los identifique de forma libre. (Así, por ejemplo: nube, casa, pájaro, barco,...)
- Trabajar con formas raras y que no conozca, para que cada uno de los niños ponga nombres distintos (si es el caso), según identifique de forma libre.

- Trabajar con formas raras y dibujos numéricos alternando, para que identifique de forma libre.

  ƻ 3 ɐ 1 ₩ 2

- Trabajar sólo con dibujos numéricos y siempre con al menos dos formas diferentes; nunca una sola. (En la presentación de los dibujos debemos evitar el orden de los números naturales: 1, 3, 2, 5, 4,...)

  1 3 2 4

- Permitir que los niños dibujen de forma libre y en un papel blanco los distintos guarismos y siempre de uno en uno. (Copia varias veces este dibujo: 1)
- Cuando el niño dibuje el guarismo respetando los elementos verticales y laterales de las formas numéricas, es cuando podemos educar el trazo, guiándoles en la direccionalidad correcta.

Las cifras son números particulares a los que se confía la tarea de representar los números. (Guedj, 1998: 34)

ANEXO 2 METODOLOGÍA DIDÁCTICA

Expongo orientaciones básicas sobre Metodología didáctica para el desarrollo en el aula de las actividades que en este libro se han diseñado. Estas breves orientaciones no se disponen al antojo de la obligación de seguirlas; más bien, a la responsabilidad del respeto a considerarlas.

1. Dominar la materia que se está enseñando, distinguiendo: la idea, de la notación de la idea. Una cosa es la referencia intelectual al concepto y otra, muy distinta, es la utilización de la simbología que se utiliza para representarlo. Diferencia clara entre metalenguaje y lenguaje objeto. Así, por ejemplo, el número cero no es esto: "0"; eso es lo que se utiliza para representar la ausencia de elementos, siempre y cuando así se interprete. No faltan textos en los que, confundiéndose concepto y simbología, podemos leer que el cero es una rosquilla, que el cero es un círculo, que el dos es un patito, o, que el seis (6) es "el número que no quiso ser cero"; que...
2. Dominar el arte de preguntar, partiendo siempre del lenguaje del alumno, como modelo de duda, desafío y camino de comprensión para el aprendizaje, en la adquisición del concepto que se esté elaborando intelectualmente; conduciendo al alumno mediante ejemplos y contraejemplos que fomenten la discusión y el diálogo, para que sea él, y sin corrección alguna por nuestra parte, el que advierta con claridad, por el diálogo interior provocado: el acierto o el error cometido. Utilizar la pregunta, desde la enseñanza, como modelo didáctico; desde el aprendizaje, como fuente de conocimiento.
3. Entender que: la evidencia, la realidad, la necesidad y la curiosidad son situaciones necesarias para el desarrollo del pensamiento en los procesos de enseñanza-aprendizaje; por lo que no debemos olvidar que los materiales que utilicemos pueden por la metodología empleada favorecer, o no, esas situaciones.

4. Utilizar modelos didácticos, fomentando la investigación y el método científico que, a modo de recurso, permita el descubrimiento y la comprensión clara de los conceptos y relaciones.
5. Enunciar, representar y simbolizar, sin ambigüedad alguna y con el rigor y la precisión científica que en cada caso se exija, después, y sólo después, de que el alumno haya comprendido el concepto o relación. Relatar acontecimientos de la Historia, así como partes significativas de biografías, que estén relacionados con el concepto trabajado, siempre que sea posible, y de manera sugerente y atractiva.
6. Presentar al alumno actividades desafiantes, a modo de resolución de problemas -donde se declare útil la autocorrección como contraste de ideas. Para que una actividad se pueda definir como problema implica que el niño sepa qué hay que hacer pero no cómo hacerlo. El éxito no está en desnaturalizar estas condiciones básicas, sino en adaptar a la edad el desafío, teniendo presente en todo momento los fundamentos psicopedagógicos de evolución y desarrollo.
7. Conseguir que los contenidos enseñados se conviertan en conocimientos aprendidos, fomentando: la aplicación, transferencia y abstracción de esos contenidos, a cualquier campo científico, natural y social.
8. Apoyar la participación del alumno, de forma natural y espontánea, en la búsqueda del conocimiento, y no tan sólo, y de forma exclusiva, en el antojo del programa para obtener respuestas a preguntas pre-establecidas.
9. Motivar al aprendizaje hacia el saber, hacia el sentir y hacia el querer. Saber bien, querer saber, sentirse bien sabiendo y aplicar correctamente lo que sabe, será finalidad educativa de cualquier currículo.
10. Escuchar al niño:
    a) Que las respuestas que obtengamos no coincidan con las que esperamos implica, simplemente, discrepancia entre la enseñanza y el aprendizaje, y no significa en modo alguno que el niño no razone. (Déjale hablar)
    b) El niño nunca responde por azar, si no ha sido intimidado. (No le intimides)
    c) El niño nunca quiere fallar o hacerlo mal, si no ha sido irritado. (No le irrites)
    d) Ni existe, ni existirá método alguno de enseñanza superior a la capacidad de aprendizaje de la mente humana. (Si el niño no lo ve con lo que has preparado, cambia lo que has preparado)

ANEXO 3 CANCIONES DE NÚMEROS

Canciones para jugar y aprender las descomposiciones de un número como suma de otros dos[15].

UNO

UNO: piruleta;
Piruleta de limón.
UNO: camiseta;
Camiseta de algodón.
UNO: caramelo;
Caramelo de pomelo.
UNO: lapicero;
Lapicero de cartero.

UNO[16]*: (...);*

(... de ...)

DOS

DOS palmadas
Hacen ruido:
UNO más UNO,
oye el oído[17].

15 Estas canciones las pueden trabajar los niños a través de los cuadernos "La caja de números 1 y 2". Ver Fernández Bravo (2004).

16 Continuar la canción señalando cualquier objeto significativo para el niño. Indicar el objeto señalado con alguna característica, propiedad o atributo. Así, por ejemplo: "uno: manzana, manzana de color verde"; "uno: silla, silla de madera".

17 Se puede jugar con distintas láminas que representen fácilmente un total de dos elementos, como por ejemplo: Una lámina en la que se vean dos orejas, una lámina en la que se vean dos ojos, una lámina en la que se vean dos... Cada día jugaremos con una lámina distinta, que se dará al azar a un niño o niña cualquiera. Éste dará la vuelta a la lámina para que los demás niños no vean el dibujo. Les enseñaremos a jugar de tal forma que el niño o niña que tiene el dibujo sea el que comience la canción, diciendo: "Dos palmadas hacen ruido, uno más uno oye el oído (da las palmadas), ***¿quién tiene los ojos* que se han escondido?*** Los demás pronunciarán el nombre de este niño, y él mostrará a todos la lámina que pasará posteriormente a otro compañero. El compañero continuará el juego de la misma forma. Otro día, jugaremos con otra lámina distinta ***(Si de ojos se tratase; las manos, si de manos se tratase; las orejas, si de orejas se tratase; las...)**

TRES

TRES "niños" se escondieron.
DOS más UNO,
aparecieron[18].

CUATRO

CUATRO espantapájaros
hacen su trabajo.
TRES son de paja y UNO de trapo.
DOS abren las piernas Y DOS abren los brazos.

CINCO

CINCO barcos
Por el mar navegan:
"CUATRO más UNO",
dicen algunos.
Susurra la voz:
También, "TRES más DOS".

SEIS

En una pecera
SEIS peces había:
TRES sonreían a TRES que soñaban.
En una pecera SEIS peces había:
CUATRO bailaban y DOS saludaban.
En una pecera SEIS peces había:
CINCO nadaban y UNO aplaudía.

SIETE

SIETE muñecos
Tengo en mi cama:
SEIS de peluche y UNO de lana:
CINCO en la colcha y DOS en la almohada:
CUATRO con chándal y TRES con pijama.
SIETE muñecos
Tengo en mi cama.

18 Representar con los mismos niños, de tres en tres. Utilizar posteriormente láminas en las que se puedan percibir y distinguir fácilmente tres elementos; jugaríamos a esconder la lámina al tiempo que expresamos la canción.

OCHO

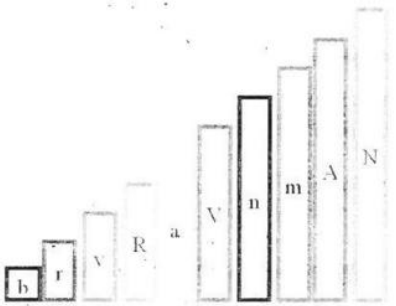
OCHO escobas,
Barre que te barre:
¡Que te barren!, ¡que te barren!
SIETE más UNO,
barren la luna.
SEIS más DOS,
barren el sol.
CINCO más TRES,
Las nubes que ves.
CUATRO más CUATRO,
descansan un rato.
Y..., OCHO escobas,
barre que te barre:
¡Que te barren!, ¡que te barren!

NUEVE

NUEVE brujos novatos
se ponen al día.
OCHO van al Burger y UNO a la pizzería.
SIETE hablan de euros y DOS de alcancía vacía.
SEIS saben idiomas y TRES tecnología.
CINCO andan a plazos y CUATRO en garantía.
NUEVE brujos novatos
se ponen al día.

ANEXO 4 REGLETAS DE CUISENAIRE

El material Números en Color o regletas de Cuisenaire por su estructura es uno de los mejores materiales manipulativos para el desarrollo del pensamiento numérico y matemático[19]. Las posibilidades que tiene este material para generar ideas matemáticas en la mente del alumno son enormes.



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

El material Números en Color o regletas de Cuisenaire no nos sirve para contar, debido a que contar requiere de elementos independientes. Podríamos utilizar solamente las regletas blancas para seguir las actividades que se han ido realizando en la I parte de este libro.

19 El inconveniente que tiene este material es su dificultad de utilización didáctica. Se debe utilizar para que el alumno encuentre respuestas manipulando y no para que el maestro le diga lo que tiene que ver. Habitualmente no se utiliza bien y es también muy habitual que sea criticado negativamente por aquellos que lo utilizan mal. El material Números en Color o regletas de Cuisenaire es el único material reconocido para la enseñanza de las matemáticas y ha demostrado suficientemente su valía didáctica.

Sin embargo, el material Números en Color o regletas de Cuisenaire nos ayuda considerablemente a entender el proceso de adquisición del concepto de número sin necesidad de contar, expuesto en la II parte de este libro. Nos permite seguir perfectamente todos los pasos expuestos para el pensar numérico, facilita la comprensión y entendimiento de los conceptos y relaciones que aparecen, favorece la memoria y la intuición generando procesos cognitivos y metacognitivos esenciales para el desarrollo del pensamiento numérico[20] y matemático.

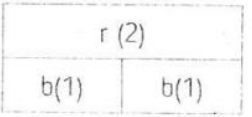
Principio de Generación

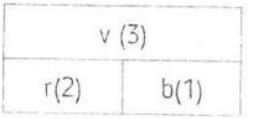
Con este material conviene utilizar la regleta blanca como elemento coordinable. Llamar "uno" a la regleta blanca y seguir los pasos descritos en el Principio de Generación.

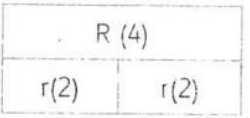
UNO

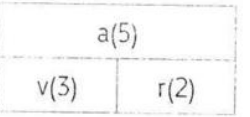
Principio de Asignación

Si llamamos "uno" a la regleta blanca, así podríamos construir las parejas fundamentales[21], para trabajar el Principio de Asignación.









20 Para más información sobre la utilización de las regletas de Cuisenaire en atención al desarrollo numérico que expresamos en este libro, se puede ver: Fernández Bravo (2013, págs. 119-168; 2012, págs. 93-105). Para una información general sobre la utilización de las regletas a cualquier edad se puede ver: *Números en Color*, Fernández Bravo (2007).

21 Para seguir fácilmente la explicación, en los gráficos utilizamos la representación literal de las regletas y, entre paréntesis, su valor medida con la blanca. Si a la blanca le llamamos 1, a la marrón (por ejemplo) le llamamos 8; así expresamos: **m(8).** Con los alumnos nunca utilizaremos esta manera conjunta de expresar; utilizamos colores o utilizamos números.

(...)

V(6)= v(3) + v(3); n(7)= R(4) + v(3);

m(8)= R(4) + R(4); A(9)= a(5) + R(4)

Principio de relación

A: Fase de composición-descomposición.

Ejemplo: 6

6	
5	1
4	2
3	3

B: Fase de cardinalización.

Ejemplo: 4

		4	
	2		2
1	1	1	1

C: Fase de ordenación.

Ver apartado 3.3. del libro (Utilizar regletas en vez de torres de cubos)

D: Fase de adición.

Expresar un número menor que diez como suma de otros,

m(8)	
?	?

calcular sumas cuyo resultado sea menor que diez

?	
a(5)	b(1)

encontrar el sumando que falta en una suma de dos sumandos,

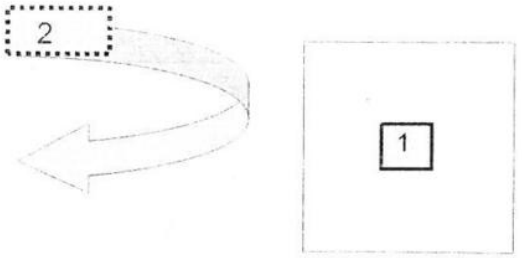
n(7)	
a(5)	?

iniciarse en la sustracción como operación inversa de la adición,

v	
r	b

3	
2	1

Ante los ojos del niño, iremos a la composición que representa tres (dos más uno) y quitaremos la regleta que representa dos. Miraremos al niño y le diremos: "tres menos dos es igual a uno", porque "uno más dos es igual a tres".



Posteriormente, permitiremos que el niño ejecute las órdenes que nosotros vayamos dando, identificando la composición de una cantidad y quitando la parte de esa cantidad que se sustrae.

n(7)	
a(5)	?

n - a = r ; 7 - 5 = 2

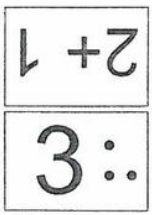
escribir los números que faltan en una suma de más de dos sumandos.

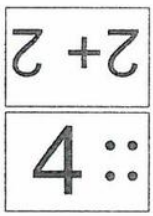
n(7)		
R(4)	?	r(2)

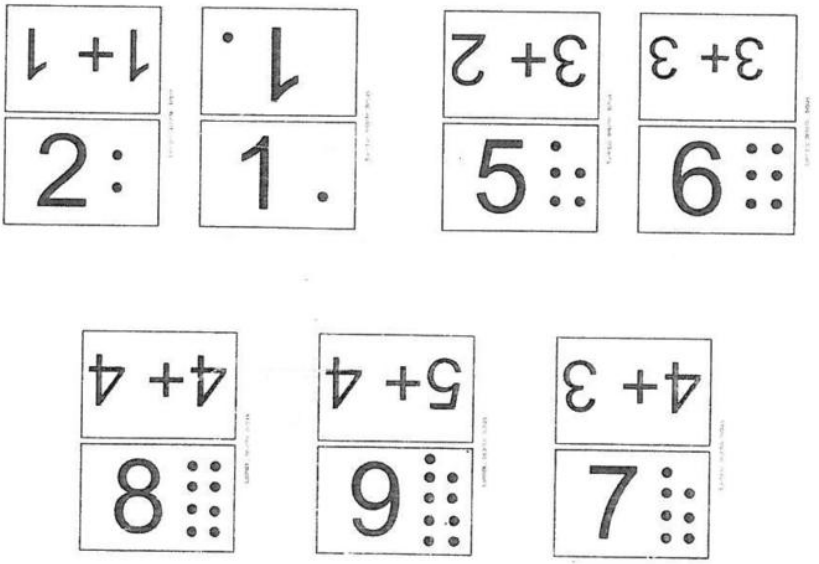
ANEXO 5 TARJETAS DE NÚMEROS

Tarjetas en tamaño cuartilla (DIN A5). En nuestros gráficos representamos las dos tarjetas que se corresponden en una hoja DIN A4; así, al doblar por la mitad, tendríamos un tamaño DIN A5 en el que por delante se vería el número con los puntos y, por detrás, la suma que le corresponde. Estas tarjetas son útiles para que los niños las manejen como apoyo visual y memorístico. Las investigaciones que hemos llevado a cabo nos muestra que las tarjetas nos serán de mayor utilidad didáctica y servirán para establecer más relaciones, si las fabricamos de esta manera:

> por una cara llevarán el NÚMERO y acompañando a éste la cantidad de PUNTOS que le corresponda, tal y como se muestra en los siguientes gráficos (los puntos -representados por círculos negros y redondos- estarán a la derecha del número en posición vertical y en *dos columnas -en cantidad según la suma que aparece por detrás-*); y, por la otra cara llevarán la SUMA de dos sumandos con la que vamos a identificar a ese número (parejas fundamentales). La grafía de los números siempre en color negro y el fondo blanco.







ALGUNAS ACTIVIDADES QUE SE PUEDEN REALIZAR CON LA UTILIZACIÓN DE LAS TARJETAS

Las posibilidades de utilización que tienen las tarjetas son infinitas. Trabajando con los niños se nos ocurrirá otras muchas actividades, y distintas a las que aquí se presentan, que den respuesta positiva a necesidades de aprendizaje que surgen de forma espontánea.

> *Se ha comprobado que el interés del niño por el conocimiento que recibe está en razón directa de la parte activa que toma él mismo en su adquisición. (Puig Adam, 1956:5)*

Las siguientes actividades se expresan informando del procedimiento a seguir. El profesorado las adaptará en función de la edad o de las posibilidades del niño. Todas las actividades están diseñadas para que el niño utilice siempre sus tarjetas, y de forma libre. Se favorecerá y provocará en todo momento la autocorrección.

Recordemos, para seguir con claridad las siguientes actividades, que: cada tarjeta representa un **NÚMERO** y su cantidad de **PUNTOS** y, por detrás, llevan la **SUMA** de dos **sumandos** con la que se identifica al NÚMERO. Ejemplo:

Ejemplo: delante / detrás

1. ENSEÑAME LO QUE YO TE ENSEÑO. Sin pronunciar el nombre de ningún número o expresión matemática, se le enseña al niño cualquier NÚMERO para que él busque lo mismo que está viendo y nos lo muestre con sus tarjetas. Una vez conseguidas estas actividades, se le enseña alguna SUMA de dos sumandos para que el niño busque lo mismo que está viendo.

2. ENSEÑAME LO QUE HAY DETRÁS DE LO QUE YO TE ENSEÑO. Sin pronunciar el nombre de ningún número o expresión matemática, se le enseña al niño cualquier NÚMERO para que él nos muestre lo que hay detrás de ese número. Una vez conseguidas estas actividades se le enseña las SUMAS de dos sumandos para que el niño nos enseñe lo que hay detrás de esas sumas. (Si le enseñamos el número 2 y él nos enseñará (1 + 1). Si enseñamos 4 + 3 nos tienen que enseñar 7)

3. ENSEÑAMOS SOLO LOS PUNTOS Y EL NIÑO NOS ENSEÑA EL NÚMERO O LA SUMA. Le enseñamos al niño los PUNTOS que aparecen en una tarjeta cualquiera tapando el NÚMERO correspondiente, y él nos tiene que enseñar el NÚMERO que aparece en esa tarjeta. Una vez conseguidas estas actividades le enseñamos al niño los PUNTOS que aparecen en una tarjeta cualquiera, tapando el NÚMERO correspondiente, y él nos tiene que enseñar la SUMA que se corresponde con ese NÚMERO.

4. SE EXPRESA EL NOMBRE DEL NÚMERO PARA QUE ASOCIE EL NOMBRE CON SU FORMA O DIBUJO (GUARISMO). Tiene que buscar el NÚMERO que oyen (Enséñame el dibujo del número...)

5. SE LEE UNA SUMA PARA QUE ASOCIE LA DICCIÓN-AUDICIÓN CON SU FORMA O DIBUJO. (Por ejemplo, al tiempo que le enseñamos la SUMA "2 + 2", les decimos: enséñame el dibujo de "dos más dos"; y, después les preguntaremos ¿cómo se lee esta SUMA? ...)

6. SE EXPRESA EL NOMBRE DEL NÚMERO PARA QUE NOS DIGAN LA SUMA QUE HAY DETRÁS. Tiene que buscar y expresar oralmente lo que hay detrás del NÚMERO que oyen. (Dime cómo se lee lo que hay detrás del NÚMERO... -sin enseñar tarjeta alguna-).

7. ENSEÑAMOS SÓLO LOS PUNTOS Y EL NIÑO NOS **DICE** A QUÉ NÚMERO CORRESPONDE. Le enseñamos al niño los PUNTOS que aparecen en una tarjeta cualquiera tapando el NÚMERO correspondiente, y él tiene que expresar oralmente el NÚMERO al que corresponde.

8. ENSEÑAMOS SÓLO LOS PUNTOS Y EL NIÑO NOS **DICE** A QUÉ SUMA CORRESPONDE. Le enseñamos al niño los PUNTOS que aparecen en una tarjeta cualquiera tapando el NÚMERO correspondiente, y él tiene que expresar oralmente la SUMA a la que corresponden esos PUNTOS.

9. ENSEÑAMOS SÓLO LOS PUNTOS Y EL NIÑO NOS TIENE QUE ENSEÑAR Y EXPRESAR ORALMENTE EL NÚMERO DE UNA TARJETA QUE TENGA: MÁS PUNTOS; MENOS PUNTOS.

10. ENSEÑAMOS, Y EXPRESAMOS ORALMENTE, SÓLO EL NÚMERO DE UNA TARJETA CUALQUIERA Y EL NIÑO NOS TIENE QUE ENSEÑAR Y EXPRESAR ORALMENTE EL NÚMERO DE UNA TARJETA QUE TENGA: MÁS PUNTOS; MENOS PUNTOS.

11. ENSEÑAMOS SÓLO LA SUMA Y NOS TIENE QUE ENSEÑAR UNA TARJETA QUE TENGA: MÁS PUNTOS; MENOS PUNTOS.

12. ESCRIBIMOS UNOS NÚMEROS EN LA PIZARRA. ESOS SON LOS NÚMEROS CON LOS QUE VAMOS A JUGAR AHORA. UTILIZAMOS TANTAS SILLAS COMO NÚMEROS. ESCONDEMOS LA TARJETA DE UN NÚMERO DETRÁS DE UNA SILLA Y, DELANTE DE LAS DEMÁS, A LA VISTA DE LOS NIÑOS, PONEMOS LOS OTROS NÚMEROS CON LOS QUE JUGAMOS Y HEMOS IDENTIFICADO EN LA PIZARRA. Tienen que averiguar cuál es el número escondido. (Graduar la dificultad de esta actividad hasta conseguir trabajar con todos los números (del 1 al 9) sin escribir ninguno en la pizarra)

13. ESCRIBIMOS UNOS NÚMEROS EN LA PIZARRA. ESOS SON LOS NÚMEROS CON LOS QUE VAMOS A JUGAR AHORA. UTILIZAMOS TANTAS SILLAS COMO NÚMEROS. ESCONDEMOS LA TARJETA DE UN NÚMERO DETRÁS DE UNA SILLA Y, DELANTE DE LAS DEMÁS A LA VISTA DE LOS NIÑOS, PONEMOS LAS SUMAS QUE SE CORRESPON-

DEN CON LOS OTROS NÚMEROS QUE HEMOS IDENTIFICADO EN LA PIZARRA. Tienen que averiguar cuál es la SUMA escondida. (Graduar la dificultad de esta actividad hasta conseguir trabajar con todos los números (del 1 al 9) sin escribir ninguno en la pizarra).

14. ESCRIBIMOS EN LA PIZARRA ALGUNAS SUMAS DE ESAS TARJETAS. ESOS SON LAS SUMAS CON LOS QUE VAMOS A JUGAR AHORA. UTILIZAMOS TANTAS SILLAS COMO A TARJETAS DISTINTAS CORRESPONDAN. ESCONDEMOS LA TARJETA DE UN NÚMERO DETRÁS DE UNA SILLA Y, DELANTE DE LAS DEMÁS A LA VISTA DE LOS NIÑOS, PONEMOS LOS OTROS NÚMEROS CON LOS QUE JUGAMOS Y CUYAS SUMAS DEBEMOS IDENTIFICAR EN LA PIZARRA. Tienen que averiguar cuál es el número/la suma escondido/a.

15. A PARTIR DE UN NÚMERO CUALQUIERA NOSOTROS DIREMOS UN SUMANDO DE LA SUMA QUE LE CORRESPONDE Y EL NIÑO DIRÁ EL OTRO SUMANDO. Así, por ejemplo: si jugamos con el 5 y nosotros decimos 3, el niño tiene que decir "dos" (2). "Jugamos con el 7. Si yo digo 3 tú dices... ("cuatro" (4))".

16. TAPAR UN SUMANDO DE UNA SUMA Y AVERIGUAR: TODOS LOS NÚMEROS POSIBLES A LOS QUE PUEDE CORRESPONDER ESA TARJETA; EL NÚMERO EXACTO CON MÁS PISTAS (MAYOR O MENOR QUE...). Así, por ejemplo: si tomo una de esas tarjetas y, de una SUMA enseño sólo el 3 y tapo el otro SUMANDO, el NÚMERO de la tarjeta puede ser: 6 (por (3) + 3); 7 (por 4 + (3)); 5 (por (3) + 2). Así que puedo pedir que me enseñen todas las tarjetas con los posibles NÚMEROS en los que 3 es un SUMANDO. Después puedo ir dando pistas, para que acierten el NÚMERO exacto: es mayor que 6; luego, sólo puede ser 7.

17. TAPAR UN SUMANDO DE UNA SUMA Y PEDIR AL NIÑO QUE NOS ENSEÑE LA TARJETA DE UN NÚMERO MAYOR/MENOR QUE EL NÚMERO DE NUESTRA TARJETA. Si yo tapo el SUMANDO 3 de (3 + 3), una tarjeta, con seguridad, de un NÚMERO mayor al que yo tengo es 8.

18. EXPRESAR UN NÚMERO MAYOR O IGUAL A 3 COMO SUMA DE TRES SUMANDOS. Si enseño la tarjeta -por ejemplo- del NÚMERO 5, puedo expresarlo como 3 + 2, según la SUMA que aparece por detrás. Como sé que el NÚMERO 2 tiene por SUMA 1 + 1, puedo escribir 5 como: 3 + 1 + 1.

19. EXPRESAR UN NÚMERO MAYOR O IGUAL A 4 COMO SUMA DE CUATRO SUMANDOS. Si enseño la tarjeta -por ejemplo- del NÚMERO 5, puedo expresarlo como 3 + 2, según la SUMA que aparece por detrás. Como sé que 2 es 1 + 1, y 3 es 2 + 1, puedo escribir 5 como: 2 + 1 + 1 + 1.

20. EXPRESAR EL NÚMERO QUE SE CORRESPONDE CON UNA SUMA. Se escribe en la pizarra una suma CUALQUIERA y el niño, jugando con sus tarjetas, tiene que averiguar el NÚMERO de su suma.

21. CON DOS SUMANDOS QUE APAREZCAN EN LAS TARJETAS. Así, por ejemplo: 3 + 3. El niño nos dirá que es 6 jugando con sus tarjetas porque es la SUMA que aparece en el NÚMERO 6.

22. CON TRES SUMANDOS, POR EJEMPLO (con independencia del orden en el que aparecen los sumandos): (1 + 1 + 1); (2 + 1 + 1); 2 + 1 + 2; 3 + 1 + 1; 3 + 3 + 3; etc.

23. CON CUATRO SUMANDOS: (2 + 2 + 2+ 2) ; 3 + 2 + 2 + 2; 1 + 1 +1 + 1; etc.

24. CON DOS sumandos cualesquiera QUE NO APAREZCAN EN LAS TARJETAS. Así, por ejemplo: 5 + 3. Como *necesariamente tienen que jugar con las tarjetas*, una posible manera de proceder por el niño puede ser la siguiente: "5 es 3 + 2, puedo poner 3 + 2 + 3. Como 3 + 3 es 6, puedo poner 6 + 2 (no hay ninguna tarjeta con 6 + 2, así que tengo que actuar de otra forma hasta encontrar una suma de dos sumandos que venga en una de mis tarjetas). Empiezo de nuevo: 5 + 3. "Cambio el 5 por 3 + 2 (sí puedo porque viene en la tarjeta del 5) y el 3 por 2 + 1; así que tengo: 3 + 2 + 2 + 1. Cambio el 3 por 2 + 1; así que tengo: 2 + 1 + 2 + 2 + 1. Cambio el 1 + 1 por 2 (Sí puedo porque es la suma que aparece en la tarjeta del número 2), y cambio el 2 + 2 por 4; así que tengo, después de esos cambios: 4 + 4. Ahora sí puedo decir 8 (porque es el número que aparece en la tarjeta de la suma 4 + 4). Ya sé que 5 + 3 = 8.

BIBLIOGRAFÍA

ALEXANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N.; LAURENTIEV, M. A. y OTROS (1994). *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Madrid: Alianza Universidad.

ALSINA, A. y SÁIZ, D (2004). El papel de la memoria de trabajo en el cálculo mental un cuarto de siglo después de Hitch. *Infancia y aprendizaje*, 27(1), 15-25.

ANSARI, D. y KARMILOFF-SMITH, A. (2002). Atypical trajectories of number development: a neuroconstructivist perspective. *Trends in cognitive sciences*, 6 (12), 511-516.

BARNER, D.; THALWITZ, D.; WOOD, J.; YANG, S. y CAREY, S. (2007). On the relation between the acquisition of singular-plural morphosyntax and the conceptual distinction between one and more than one. *Developmental Science*, 10 (3), 365-373.

BARODDY, A. (1988). *Educacion infantil, contenidos, procesos y experiencias.* Madrid: Narcea.

– (1994). *El pensamiento matemático de los niños: un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial.* Madrid: Antonio Machado.

BERMEJO, V. (1990). *El niño y la aritmética. Instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas.* Barcelona: Paidós.

– y LAGO, O. (1991). *Aprendiendo a contar. Su relevancia en la comprensión y fundamentación de los primeros conceptos matemáticos.* Madrid: CIDE.

– LAGO, O. y RODRÍGUEZ, M. R. (1989). Procedimientos de cuantificación y cardinalidad. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 42 (4) 483-491.

BORGES, J. L. (1944). De "Tlön, Uqbar, Orbis Tertius", *Ficciones*. Sudamericana.

BRIARS, D. y SIEGLER, R. S. (1984). A featural analysis of preschoolers counting knowledge. *Developmental Psychology*, 20, 607-618.

BRISSIAUD, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo: más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos.* Madrid: Visor.

BRYANT, T. N. (2003). *Las matemáticas y su aplicación: la perspectiva del niño.* Mexico D. F.: Siglo veintiuno.

BUTTERWORTH, B. (1999). *The mathematical brain.* London: MacMillan.

CANTLON, J. y BRANNON, E. (2006). Shared system for ordering small and large numbers in monkeys and humans. *Psychological Science*, 17 (5), 401-406.

CLARK, R. y GROSSMAN, M. (2007). Number sense and quantifier interpretation. *Topoi*, 26 (1), 51-62.

DANTZIG, T. (1954). *Number: the Language of Science*. New York: The Free Press.

DEHAENE, S. (1997). *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

– (2001). Précis of the Number Sense. *Mind and Language*, 16 (1), 16-36.

– y COHEN, L. (1991). Two mental calculation system: A case study of severe acalculia with preserved approximation. *Neuropsychologia*, 29, 1045-1075.

– y COHEN, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical Cognition*, 1 (1), 83-120.

– y COHEN, L. (1997). Cerebral pathways for calculation: double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic. *Cortex*, 33, 219-250.

– , DEHAENE-LAMBERTZ, G. y COHEN, L. (1998). Abstract representations of numbers in the animal and human brain. *Trends in Cognitive Sciences*, 2, 355-361.

– ; MOLKO, N.; COHEN, L. y WILSON, A. J. (2004). Arithmetic and the brain. *Current opinion in neurobiology*, 14, 218-224.

– ; PIAZZA, M.; PINEL, P. y COHEN, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive neuropsychology*, 20 (3/4/5), 487-509.

DIENES, Z. P. y GOLDING, E. W. (1966). *Los primeros pasos en las matemáticas 2: Conjuntos, números y potencias*. Barcelona: Teide.

FELDMAN, D. (2005). Piaget's next term stages: the unfinished symphony of cognitive development. *New Ideas in Psychology*, 22 (3), 175-231.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1994). Enseñar los números en orden obstaculiza la investigación y el descubrimiento. *Comunidad Educativa*, 212, 51-54.

– (1995). Educación, globalización y... matemática. *Comunidad Educativa*, 223, 34-37.

– (1995). Las cuatro etapas del acto didáctico. *Comunidad Educativa*, 228, 36-40.

– (1998). Investigación sobre los mecanismos de orientación lateral. El aprendizaje de los conceptos izquierda y derecha: *Suma*, 27, 57-63.

– (2001). El cuento en el aprendizaje de la matemática. Una propuesta abierta de investigación-acción. *Educación y Futuro. Revista de investigación aplicada y experiencias educativas*, 4, 95-99.

– (2003). *La numeración y las cuatro operaciones matemáticas*. Madrid: CCS.

– (2004). *El numero de dos cifras: investigación didáctica e innovación educativa*. Madrid: CCS.

– (2004). *La caja de números 1*. Madrid: CCS.

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (2004). *La caja de números 2*. Madrid: CCS.

- (2005). Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación matemática*, 4, 31-49.

- (2007). La enseñanza de la multiplicación aritmética: una barrera epistemológica en "la enseñanza de la matemática". *Revista Iberoamericana de Educación (RIE)*, 43, 119-153.

- (2007). *Números en color. Acción y reacción para la enseñanza-aprendizaje de la matemática*. (Libro + CD) Madrid: CCS.

- (2008). *Cómo enseñar matemáticas en preescolar*. México. Gil Editores.

- (2010). *La corona de la princesa de los labios de fresa*. Madrid. Grupo Mayéutica.

- (2010). La invención de problemas y el desarrollo de la competencia matemática" *Edupsykhé*, 9, (2), 221-234.

- (2010). *La resolución de problemas matemáticos. Creatividad y razonamiento en la mente de los niños*. Madrid: Grupo Mayéutica.

- (2010). Neurociencias y enseñanza de la matemática. Prólogo de algunos retos educativos. *Revista Iberoamericana de Educación (RIE)*, versión digital nº 51/3 sección "experiencias e innovaciónes (e+i): enseñanza de las ciencias y de la matemática".

- (2011). La inestabilidad de la normalidad del error en la actividad escolar. ¿Cuánto de error tienen los errores que cometen los alumnos? *Educación y Futuro*, 24, 181-203

- , MANTIS HERRERO, M. (2012). *Iniciación a las matemáticas*. Proyecto Matematitico (7 Cuadernos del alumno de 3 a 5 años y Guía Didáctica para el profesor). Madrid: Oxford University Press.

- (2012). *Desarrollo del pensamiento lógico y matemático. El concepto de número y otros conceptos*. Madrid: Grupo Mayéutica.

- (2013). *Didáctica de la matemática en la educación infantil*. (5ª Ed.) Madrid: Grupo Mayéutica.

FERNÁNDEZ, K.; GUTIÉRREZ, I.; GÓMEZ, M.; JARAMILLO, L. y OROZCO, M. (2004). El pensamiento matemático informal de niños en edad preescolar. *Zona próxima*, 42-72.

FÉRON, J.; GENTAZ, E. y STRERI, A. (2006). Evidence of amodal representation of small numbers across visuo-tactile modalities in 5-Month-old infants. *Cognitive development*, 21 (2), 81-92.

FREGE, G. (1972). *Conceptografía. Los Fundamentos de la Aritmética: otros estudios filosóficos*. México: UNAM.

FREGE, G. (1974). *Escritos lógico-semánticos*. Madrid: Tecnos.

FUSON, K. C.; PERGAMENT, G. G.; LYONS B. G.; HALL, J. W. (1985). Children's Conformity to the Cardinality Rule as a Function of Set Size and Counting Accuracy. *Child Development*, 56, (6),1429-1436.

GALLARDO, J. I. (2010). Evaluación del conocimiento matemático temprano en una muestra de 3º de Educación Infantil. *Revista de Educación*, 352, 601-615.

GARDNER, H. (1999). *Inteligencias múltiples*. La teoría en la práctica. Barcelona: Paidós.

GELMAN, R. (1993). A. rational-constructivist account of early learning about numbers and objects. *Learning and motivation*, 30, 61-96.

– (2006). Young Natural-Number Arithmeticians, Current Directions in Psychological. *Science* 15 (4), 193-197.

– y GALLISTEL, C. (1986). *The child's understanding of number*. Mass: Harvard University Press.

– y MECK, E. (1983). Preschooler's counting: principles before skill. *Cognition*. 13, 343-360.

GERSTEN, R. y CHARD, D. (1999). Number sense: rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *The Journal of Special Education*, 4/, 18-28.

GÓMEZ, C. M. (1989). *Conceptos y numeración en la Educación Infantil*. Madrid: Síntesis.

GONZÁLEZ, L. C. (1989). El concepto de número en preescolar. *Suma*, 39.

GOUTARD, M. (1966). *Las matemáticas y los niños*. Madrid: Cuisenaire de España.

GROEN, G. y RESNICK, L. B. (1977). Can preschool children invent addition algorithms? *Journal of Educational Psychology*, 1977 (69), 645-652.

GUEDJ, D. (1998). *El imperio de las cifras y los números*. Barcelona: Ediciones B.

HUNGENS, M. (1987). *Los niños y los números: Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Planeta.

KAMII, C. (1985). *El niño reinventa la aritmética. Implicaciones de la Teoría de Piaget*. Madrid: Visor.

– (1995). *El número en la educación preescolar*. Madrid: Visor.

– ; RUMMELSBURG, J. y KARI, A. (2005). Teaching arithmetic to low-performing, low-SES first graders. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24 (1), 39-50.

KLEENE, C. S. (1974). *Introducción a la metamatemática*. Madrid: Tecnos.

KLEIN, F. (2006). *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Madrid: Nivola.

LABINOWICZ, E. (1986). *Introducción a Piaget: Pensamiento, aprendizaje y enseñanza*. México: Fondo Educativo Interamericano.

LABINOWICZ, E. (1994). El conteo en los niños de los primeros años capacidades y limitaciones, en *Génesis del pensamiento matemático en el niño preescolar*, UPN. México: SEP.

LAGO, M. O.; RODRÍGEZ, P.; DÓPICO, C. y LOZANO, M. (2001). La reformulación de los enunciados del problema: un estudio sobre las variables que inciden en el éxito infantil en los problemas de comparación. *SUMA* 37, 60.

LAGO, V. B. (Diciembre de 1987) *www.papelesdelpsicologo.es*. Recuperado el 20 de Enero de 2013, de http://www.papelesdelpsicologo.es/vernumero.asp?id=347

LAWRENCE, E.; THEARKISTAN, T. R. y ISAACS, N. S. (1968). *La comprensión del número y la educación progresiva del niño según Piaget*. Barcelona: Paidós.

LOBATO, M. D. (2009). Las matemáticas en Educación Infantil. *Innovación y experiencias educativas*, 2.

LONGO, M. y LOURENCO, S. (2007). Spatial attention and the mental number line: Evidence for characteristic biases and compression. *Neuropsychologia*, 45, 400-1407.

LUCCHINI, G.; CUADRADO, B. y TAPIA, L. (Julio de 2066). *http://www.fundacionarauco.cl/_file/file_3878_errar%20no%20es%20siempre%20un%20error.pdf*. Recuperado el 5 de Febrero de 2012.

MALASPINA JURADO, U. (2009). Conteo y pensamiento matemático. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 131-139.

MARTÍNEZ, J.; BUJANDA, M. P; VELLOSO, J. M. (1981). *Matemáticas 1 escuelas universitarias de profesorado de EGB*. Valladolid. Editorial: SM.

MCCLOSKEY, M.; CARAMAZZA, A. y BASILI, A. (1985). Cognitive mechanisms in number processing and calculation: Evidence from dyscalculia. *Brain and Cognition*, 4, 171-196.

MCMILLAN, C.; CLARK, R.; MOORE, P. y GROSSMAN, M. (2006). Quantifier comprehension in corticobasal degeneration. *Brain and Cognition*, 62 (3), 250-260.

MIALARET, G. (1967). *Pedagogía de la iniciación en el cálculo*. Buenos Aires: Kapelusz.

MIRANDA, A. y GARCÍA, R. (2004). Mathematics education and learning disabilities in Spain. *Journal of Learning Disabilities*, 37, 62-73.

NIETZSCHE, F. W. (1990). *Más allá del bien y del mal*. Madrid: Ediciones PPP

NUNES, T. y BRYANT, P. (1997). *Las matemáticas y su aplicación: la perspectiva del niño*. México: Siglo XXI.

OYARZUN C. (2005). La habilidad de contar: el fundamento cognitivo del concepto de número y la resolución de problemas verbales aritméticos. *REXE: Revista de estudios y experiencias en educación*, 4, (8). 2005, 139-152.

PIAGET J. (1952). *The Child's Conception of Number*. London: Routledge y Kegan Paul.

- (1970). *El juicio y el razonamiento en el niño.* Buenos Aires: Guadalupe.

- (1980). *Biología y conocimiento.* Madrid: Siglo Veintiuno.

- Y SZEMINSKA, A. (1941). *Le génese du nombre chez l'enfant.* Neuchatel: Delachaux et Niestlé.

- ; INHELDER, B. (1983). *Génesis de las estructuras lógicas elementales.* Buenos Aires: Guadalupe.

- (1967). *La génesis del número en el niño.* Buenos Aires: Guadalupe.

PUIG ADAM, P. (1956). *Didáctica, Matemática, Eurística.* Madrid: Institución de Enseñanza Laboral.

RAMÓN Y CAJAL, S. (1995). *Reglas y consejos sobre investigación científica. Los tónicos de la voluntad.* Colección Austral. (13ª Ed.) Madrid: Espasa Calpe.

RESNICK, L. FORD, W. (1998). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona: Paidós.

RUSELL, B. (1988). *Introducción A la filosofía matemática.* Barcelona: Paidós.

SAÁ ROJO, M. D. (2000). *Las matemáticas de los cuentos y las canciones.* Valencia: Promolibro.

SAN ANDRÉS, C. (2002). *Jugar, cantar y contar. Juegos y canciones para los más pequeños.* Madrid: Teleno.

SÁNCHEZ MARTÍNEZ. C. (1968). *La mathématique intuitive.* Paris: Rossane.

SCHIRLIN, O. y HOUDÉ, O. (2006). Negative priming effect after inhibition of weight/number interference in a Piaget-like task. *Cognitive Development,* 22 (1), 124-129.

SERRANO GONZÁLEZ TEJERO, J. M. y DENIA GARCÍA, A. M. (1994). *¿Cómo cuentan los niños? Un análisis de las teorías más relevantes sobre la construcción de los esquemas de conteo.* Murcia: Instituo Ciencias de la Educación ICE.

SKEMP, R. R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Morata.

STARKEY, P. (1992). The early development of numerical reason. *Cognition,* 43, 93-126.

STARKEY P. y COOPER R. G. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science:* 210: 103-35.

STERNBERG, R. J. y GRIGORENKO, E. L. (2000). *Our labeled children. What every parent and teacher needs to know about learning disabilities.* Cambridge, Massachusetts: Perseus Publishing Group.

VALCÁRCEL, R. y ÉCIJA, A. M. (2002). *Pasemisí, pasemisá. Canciones y juegos infantiles de Madrid.* Madrid: Ediciones La Librería.

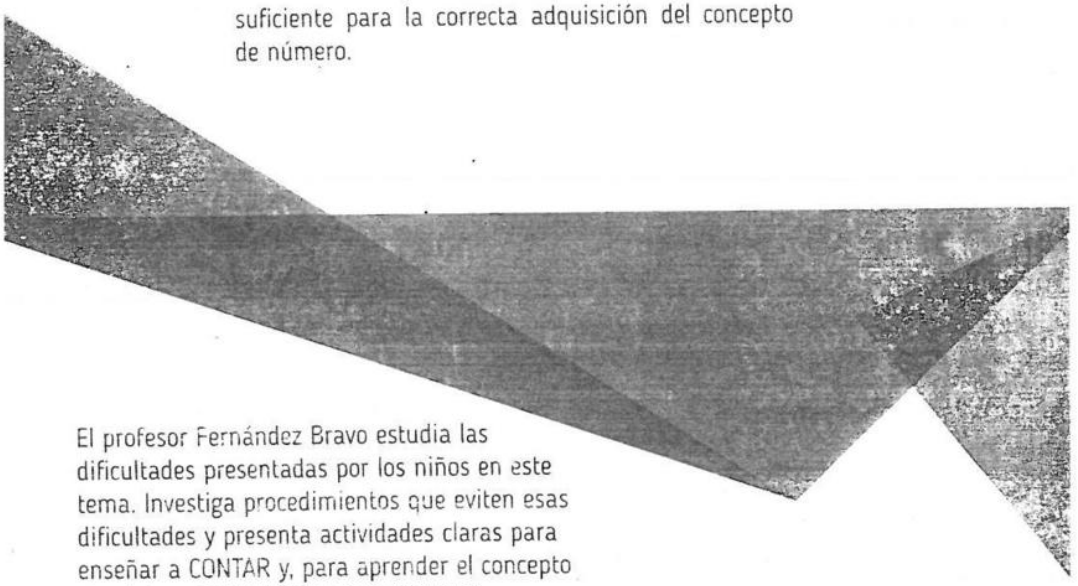
VILLAROEL, J. D. *Investigación sobre el conteo infantil.* Recuperado el 07 de 02 de 2012, http://www.ehu.es/ikastorratza/4_alea/4_alea/conteo%20infantil.pd

ENSÉÑAME A "CONTAR" Y... A "NO CONTAR"
de **José Antonio Fernández Bravo**
se terminó de imprimir en el mes de febrero del 2017,
en los Talleres Gráficos de Lluvia Editores de la
Av. Inca Garcilaso de la Vega 1976, Of. 501. Lima - 1.
Tiene una tirada de mil ejemplares.

La adquisición del concepto de número no es fácil para los niños.

Desde muy pequeños les enseñamos a contar (uno, dos, tres, cuatro,...). Madres y maestros, abuelas y padres, maestras y abuelos, y hermanos y... nos iniciamos en una actividad que les guiará en las primeras experiencias "numéricas". Esta necesaria actividad de contar debe dirigirse correctamente para evitar dificultades en el que aprende.

Cuánto más tiempo permanezca el niño en la etapa de conteo, más obstáculos tendrá el desarrollo de su pensamiento numérico y matemático. Hay que utilizar otras estrategias más elaboradas y relaciones matemáticas superiores. La técnica de contar no es suficiente para la correcta adquisición del concepto de número.



El profesor Fernández Bravo estudia las dificultades presentadas por los niños en este tema. Investiga procedimientos que eviten esas dificultades y presenta actividades claras para enseñar a CONTAR y, para aprender el concepto de número SIN NECESIDAD DE CONTAR.

ISBN: 978-612-4095-57-3